# The Poincaré-Lighthill-Kuo Method

# Poincaré-Lighthill-Kuo 方法

钱学森
加州理工学院 Daniel-Florence Gugenheim 喷气推进中心，帕萨迪纳，加利福尼亚州

（本文发表于 Advances in Applied Mechanics, Vol. 4, Academic Press, pp 281-349, 1955）

目　录

# I. 引 言

## I.1. 发展历史

Poincaré 在他的名著《天体力学的新方法》[1]中，设计了一种方法来寻求如下的一阶方程组的周期解：

（1.1） $$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n;\varepsilon) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中，$t$ 为时间变量，$\varepsilon$ 为表示摄动影响的小参数。$\varepsilon=0$ 时的方程组对应于未扰系统，它特别简单，可容易地求得周期为 $T^{(0)}$ 的周期解。Poincaré 方法的实质是求得关于参数 $\varepsilon$ 展开的摄动解，不仅把变量展开：

（1.2a） $$x_i=x_i^{(0)}+\varepsilon x_i^{(1)}+\varepsilon^2 x_i^{(2)}+\cdots$$

而且把周期 $T$ 也展开：

（1.2b） $$T=T^{(0)}+\varepsilon T^{(1)}+\varepsilon^2 T^{(2)}+\cdots$$

近年来，这一方法在非线性振动（非线性力学）理论中得到了广泛应用，该领域中经常出现（1.1）那样的方程。然而，近六十年间，人们没有对这一方法进行过实质性的推广，Poincaré 的创见的潜力并未得到充分发挥。

1949 年 5 月 19 日，Lighthill[2]在伦敦数学学会所作的讲演中，提出了一种求得物理问题一致有效近似解的技巧，介绍了对 Poincaré 方法的一种非常重要的推广。Lighthill 的目的在于改进寻求物理问题近似解的熟知的摄动法，摄动法的基本思路是：把精确解展开成小参数 $\varepsilon$ 的幂级数，零阶解与 $\varepsilon$ 无关，而一阶解正比于 $\varepsilon$，依此类推。这种方法原理简单，使用便捷，十分有效，对一大类问题产生了有用的结果。但是，时不时地遇到一些问题，它们的零阶解在感兴趣的区域里的一个点上或一条线上有某种奇性，在高阶解中，这种奇性不仅在同一位置仍然出现，而且随着阶数升高会变得越来越严重。在这种奇点附近，关于 $\varepsilon$ 的幂级数展开式失效，经典的摄动法不能给出有用的解。

Lighthill 的方法旨在克服这种困难，提供在整个感兴趣的区域一致有效（或有一致的精度）的展开式。该方法的基本思路是：不仅把因变量 $u$ 展开成 $\varepsilon$ 的幂级数，而且把自变量（如 $x$，$y$）也展开成 $\varepsilon$ 的幂级数，于是有

（1.3） $$u=u^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon u^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 u^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots$$

（1.4） $$\begin{cases} x=\xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 x^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots \\ y=\eta+\varepsilon y^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 y^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots \end{cases}$$

这里，$\xi$，$\eta$ 取代了原来的自变量 $x$，$y$。显然，$u^{(0)}(\xi,\eta)$ 就是经典的摄动法给出的零阶解，只不过用 $\xi$，$\eta$ 取代了 $x$，$y$ 而已。如果我们忽略（1.3）中 $u$ 的高阶项，则近似解就是在经变换（1.4）伸缩或变形的坐标下的零阶摄动解。有些作者根据这一事实把 Lighthill 法称为坐标摄动法*。（* 目前，经常称之为变形坐标法或伸缩坐标法。 ——译者注。）

Lighthill 把他的方法应用于含偏微分方程的问题，其中零阶解由与精确方程同阶的约化线性方程得到。然而，很快就发现 Lighthill 原先给出整个感兴趣区域一致有效解的目的并非总能达到。在许多问题中，只有利用 “边界层”解，才可得到良好的零阶解。Kuo（郭永怀）

[3]在寻求平板的不可压缩层流边界层的精致的解时，首先认知了这种必要性；此项工作以及他在超音速层流边界层方面的后续工作[4]，对 Lighthill 原先的思路做了进一步推广。

Poincaré、Lighthill 和 Kuo 的方法的基本原理无疑为许多应用数学工作者采用过，但相关概念的一般性也许从未充分地强调过。因此，倘若我们承认原创和大胆探索的重要性，就会赞赏上述三位为工程数学提供这一极其有效方法的功绩，并将此方法称为 PLK 方法。

## I.2. 简单例子

为了阐释 PLK 方法的原理，我们来考虑如下的一阶常微分方程：

（1.5） $$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+u=0.$$

将此方程除以 $du/dx$，使因变量与自变量的角色彼此交换，就得到

$$u\frac{dx}{du}+x=-\varepsilon u$$

或即

（1.6） $$\frac{d}{du}(xu)=-\varepsilon u,$$

积分上式，得

$$xu=-\frac{\varepsilon}{2}u^2+C_0,$$

其中 $C_0$ 为积分常数。如果我们施加边界条件

（1.7） $$u(1)=1,$$

则微分方程（1.5）的精确解为

（1.8） $$u=-\frac{x}{\varepsilon}+\sqrt{(\frac{x}{\varepsilon})^2+\frac{2}{\varepsilon}+1}.$$

现在我们来试用经典的摄动法，亦即将 u 展开为 $\varepsilon$ 的幂级数：

（1.9） $$u=u^{(0)}(x)+\varepsilon u^{(1)}(x)+\varepsilon^2u^{(2)}(x)+\cdots.$$

将（1.9）代入（1.5），然后令 $\varepsilon$ 的同次幂相等，我们有

（1.10） $$x\frac{du^{(0)}}{dx}+u^{(0)}=0,$$

（1.11） $$x\frac{du^{(1)}}{dx}+u^{(1)}=-u^{(0)}\frac{du^{(0)}}{dx},$$

（1.12） $$x\frac{du^{(2)}}{dx}+u^{(2)}=-u^{(0)}\frac{du^{(1)}}{dx}-u^{(1)}\frac{du^{(0)}}{dx},$$

……………………………………

若令 $u^{(0)}(x)$ 满足边界条件（1.7），则有

（1.13）　$u^{(0)}(x)=\dfrac{1}{x}.$

利用所确定的$u^{(0)}$，由（1.11）得到

$$u^{(1)}(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^3}+\frac{C_1}{x}.$$

但现在边界条件（1.7）要求

（1.14）　$u^{(1)}(1)=0.$

由此可确定积分常数 $C_1$，从而有

（1.15）　$u^{(1)}(x)=\dfrac{1}{2x}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).$

类似地有

（1.16）　$u^{(2)}(x)=\dfrac{1}{2x}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{1}{2x}\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right).$

函数$u^{(0)}(x)$在 $x$＝0 处有奇性，而（1.15）和（1.16）表明，当摄动解的阶数升高时，这种奇性变得更加糟糕，因此，这样得到的解在 $x$＝0 处毫无用处。事实上，在离开奇点 $x$＝0 处，通过分析所忽略的 $\varepsilon$ 的高阶项的阶数，就可估计此解的相对误差。于是，倘若我们根据已进行的演绎，计算到 $\varepsilon^2$ 项，则相对误差为 $O$（$\varepsilon^3$），但在奇点附近，这一估计失效，相对误差远远高于 $O$（$\varepsilon^3$），所得到的解在感兴趣的 $x$＝0 附近的区域没有一致的精度，亦即，解**不是一致有效的**。现在让我们另辟蹊径，根据 PLK 方法的要求，把 $u$ 和 $x$ 都展开成 $\varepsilon$ 的幂级数：

（1.17）　$\begin{aligned}u&=u^{(0)}(\xi)+\varepsilon u^{(1)}(\xi)+\cdots,\\ x&=\xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi)+\cdots.\end{aligned}$

现在，原来的微分方程（1.5）可写成

（1.18）　$(x+\varepsilon u)\dfrac{du}{d\xi}+u\dfrac{dx}{d\xi}=0.$

将（1.17）代入（1.18），令 $\varepsilon$ 的同次幂相等，我们得到

（1.19）　$\xi\dfrac{du^{(0)}}{d\xi}+u^{(0)}=0,$

（1.20）　$\xi\dfrac{du^{(1)}}{d\xi}+u^{(1)}=-\left(x^{(1)}+u^{(0)}\right)\dfrac{du^{(0)}}{d\xi}-u^{(0)}\dfrac{dx^{(1)}}{d\xi}.$

由（1.19）即得

$$u^{(0)}(\xi)=\frac{k_0}{\xi}.$$

如果我们加上条件

（1.21） $x^{(1)}(1)=0$

使得 $\xi=1$ 时 $x$＝1，则由边界条件（1.7）对 $u^{(0)}$ 的要求，得到 $k_0=1$，于是有

（1.22） $u^{(0)}(\xi)=\dfrac{1}{\xi}.$

利用这个 $u^{(0)}$ 解，（1.20）变成

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi u^{(1)}\right)=-\frac{1}{\xi}\frac{dx^{(1)}}{d\xi}+\frac{1}{\xi^2}x^{(1)}+\frac{1}{\xi^3}.$$

为了使 $u^{(1)}$ 的奇性不强于 $u^{(0)}$，我们利用选择 $x^{(1)}$ 时拥有附加的自由度的优越性，令

（1.23） $\dfrac{1}{\xi}\dfrac{dx^{(1)}}{d\xi}-\dfrac{1}{\xi^2}x^{(1)}=\dfrac{1}{\xi^3}.$

因此这是 $x^{(1)}(\xi)$ 应满足的微分方程，在条件（1.21）下，其解为

（1.24） $x^{(1)}=\dfrac{\xi}{2}\left(1-\dfrac{1}{\xi^2}\right).$

利用这样确定的 $x^{(1)}$，为了满足 $u$ 的原来的边界条件，我们有 $u^{(1)}\equiv 0$。于是，取到此阶近似，我们得到

（1.25）
$$u=\frac{1}{\xi},\qquad x=\xi+\varepsilon\frac{\xi}{2}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right).$$

令人惊奇的是：在（1.25）中的两个方程中消去 $\xi$ 后，我们恰好得到（1.8）给出的解 $u$。所以，对这一情形，PLK 方法不仅消弭了 $x$＝0 处的奇性困难，而且产生了如此良好的解项，事实上，给出了精确解。

## I.3. PLK 方法的基本特性

我们发现，在 $x$ 的不同区域，（1.5）的精确解关于 $\varepsilon$ 的合适的展开式是各不相同的。展开式（1.9）仅适用于远离原点的 $x$，即 $x$ 的值较大时；在原点附近，另一种完全不同的展开式才适用。解的特性的这种变化使得常规的摄动法几乎没有用处。事实上，把常规的摄动法应用于这类情形，需要有极为机敏的猜测。而另一方面，PLK 方法则是基于成规的一种简捷可靠的方法；问题中的错综复杂的关系会自动地、正确地呈现出来，无需研究者进行预测，在这方面，PLK 方法与 Laplace 变换方法并无二致，因此，对工程师来说，PLK 方法的这种特性特别重要。在以下各章中讨论例子时，我们可以更好地鉴赏此点。

PLK 方法的另一个特性是它在实际应用中的很大的灵活性。尽管 Lighthill 原先强调了

解的一致有效性，但正如下文中所述，这一要求并非总能达到。要点在于：通过引进“伸缩”坐标，我们在求解过程中赢得了附加的自由度，用以改进零阶解的准确度，原先在奇点或奇线附近零阶解极差。我们能成功到何种程度取决于问题本身。不幸的是，迄今为止，有关 PLK 方法的数学理论尚未得到充分研究，还不能从给定的微分方程和辅助条件预测此方法的成功率或失败率。但是，从目前已取得的效果看来，似乎可以肯定，PLK 方法将是工程分析中的一种有用工具，即使它产生的结果有时不如期望的那么好。

鉴于这些要点，我们对 PLK 方法的阐述将侧重于它的应用，而不是它的数学基础。实际上，此法的数学合理性的证实还只局限于几种情形。另外，这种数学分析需要把方法系统化、准则化，而如上所述，PLK 方法的特性就在于它的处理方法的灵活性。从应用的角度看来，通过实例讨论此方法，优于用一般理论加以阐释。这就是下面的阐述的精神所在。

作者愿借此机会感谢他在加州理工学院的同事们（特别是 A. Erdélyi 教授），作者与他们进行过富有启发性的讨论，并得到了他们的批评性意见。作者对这个新的数学方法的兴趣首先源自康奈尔大学的郭永怀教授的富于想象力的工作；然而，麻省理工学院的林家翘教授曾就该方法的局限性问题提醒过作者。作者谨向他们致以诚挚的谢意。

# II. 常微分方程

## II.1. 一阶方程

作为发端，我们首先研究 PLK 方法在常微分方程问题中的应用。即使对这种相对简单的情形，解的收敛性的完整证明最近才由 Wasow [5]给出，而且仅仅针对于一类很简单的一阶常微分方程，即

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+q(x)u=r(x). \tag{2.1}$$

其中假定 q(x)和 r(x)在原点 x=0 附近是正则的。我们通常对求得 $x \geq 0$ 处的解感兴趣。Lighthill 本人[2]首先按这里复述的方式对这个方程进行了研究，下文中就跟从 Lighthill，只进行启发式的论述，想了解数学证明的读者，可参阅 Wasow 的著述。

图 1 在（*x*，*u*）平面上 $(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+q(x)u=r(x)$ 的解的示意图

（图中的文字：BRANCH POINT-分支点）

以方程（2.1）作为典型情形是因为经典的摄动法在 *x*＝0 附近不能给出有用的解，困难当然在于，在（*x*，*u*）平面上的直线 $x+\varepsilon u=0$ 上方程有奇性。我们假定 $\varepsilon$ 是正的（若 $\varepsilon$ 为负，则取－*u* 为因变量，可把方程化为含正 $\varepsilon$ 的情形），于是，上述奇线如图 1 所示。在这条直线上，因为 $-q(x)\,u+r(x)$ 一般不为零，所以按照（2.1），$du/dx$ 为无穷大。如果我们采用经典的摄动法，对零阶近似来说，去掉了 $du/dx$ 的系数中的 $\varepsilon u$ 项，奇性就移至 *u* 轴上。用经典的摄动理论，在 *u* 轴上就给出 $u(x)$的无穷大的斜率。因此，若 $u^*$为经典摄动理论的结果，则 $u^*$在 *x*＝0 附近一定大大地有别于 *u*，如图 1 所示，而且这种偏差不可能由高阶摄动来改善。

现在来看看用 PLK 方法能做些什么，令

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)}(\xi)+\varepsilon u^{(1)}(\xi)+\varepsilon^2 u^{(2)}(\xi)+\cdots, \\ x &= \xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi)+\varepsilon^2 x^{(2)}(\xi)+\cdots. \end{aligned} \tag{2.2}$$

把（2.2）代入（2.1），把每一项都展开成 $\varepsilon$ 的幂级数，我们有

$$\begin{aligned}&\left(\xi+\varepsilon x^{(1)}+\varepsilon^2 x^{(2)}+\cdots+\varepsilon u^{(0)}+\varepsilon^2 u^{(1)}+\cdots\right)\left(u^{(0)}{}'+\varepsilon u^{(1)}{}'\right.\\&\left.+\varepsilon^2 u^{(2)}{}'+\cdots\right)=(1+\varepsilon x^{(1)}{}'+\varepsilon^2 x^{(2)}{}'+\cdots)\left[r+\varepsilon x^{(1)} r'\right.\\&+\varepsilon^2 x^{(2)} r'+\frac{1}{2}\varepsilon^2 x^{(1)2} r''+\cdots-\left(q+\varepsilon x^{(1)} q'+\varepsilon^2 x^{(2)} q'\right.\\&\left.\left.+\frac{1}{2}\varepsilon^2 x^{(1)2} q''+\cdots\right)\left(u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2 u^{(2)}+\cdots\right)\right].\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中撇号表示关于 $\xi$ 求导，所有变量均为 $\xi$ 的函数[例如，$q$＝$q$（$\xi$）]。令（2.3）两端与 $\varepsilon$ 无关的项相等，我们得到零阶方程

$$\xi u^{(0)}{}'(\xi)+q(\xi)u^{(0)}(\xi)=r(\xi). \tag{2.4}$$

于是当 $\xi\to 0$ 时，$u^{(0)}$ 与 $u^{(0)}{}'$ 的系数之比为 O(1/$\xi$)，所以按照微分方程理论，$\xi$＝0 为该方程的一个**正则奇点**。（2.4）的解为

$$u^{(0)}(\xi)=\exp\left\{-\int\frac{qd\xi}{\xi}\right\}\left[\int\frac{r}{\xi}\left(\exp\int\frac{qd\xi}{\xi}\right)d\xi+C\right], \tag{2.5}$$

其中 $C$ 为积分常数。现在，由于 $q(\xi)$在 $\xi$＝0 附近是正则的，故在 $\xi$＝0 处 $q$ 的值是有限的，比方说，等于 $q_0$，于是有

$$\exp\int\frac{qd\xi}{\xi}=\xi^{q_0}R(\xi), \tag{2.6}$$

其中 $R(\xi)$ 为在 $\xi$＝0 处正则的函数。但 $r(\xi)$也在 $\xi$＝0 附近正则，因此（2.5）右端方括号中的第一项为 $\xi^{q_0}R(\xi)$，于是，当 $\xi\to 0$ 时，我们有

$$u^{(0)}(\xi)=R(\xi)+O(\xi^{-q_0}), \tag{2.7}$$

其中右端第二项给出了解的奇性部分的量级。如果 $q_0$ 为非正的整数，则上述结论要稍加修正，在这种情况下，（2.5）右端方括号中的第一项含有一个 log$\xi$ 项，因此有

$$u^{(0)}(\xi)=R(\xi)+O(\xi^{-q_0}\log\xi),\qquad q_0=0,-1,-2,\cdots. \tag{2.8}$$

由（2.3）中 $\varepsilon$ 的系数导得如下的一阶方程：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\left[u^{(1)}(\xi)\exp\int\frac{qd\xi}{\xi}\right]&=\frac{1}{\xi}[(r-qu^{(0)})x^{(1)}{}'\\&+(r'-q'u^{(0)}-u^{(0)}{}')x^{(1)}-u^{(0)}u^{(0)}{}']\exp\int\frac{qd\xi}{\xi}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

如果接着用经典的摄动法，则有 $x^{(1)}\equiv 0$，而且当 $\xi\to 0$ 时，利用（2.7），由（2.9）可得

$$u^{(1)}(\xi)=O(\xi^{-q_0})+O(u^{(0)}u^{(0)}{}')=R(\xi)+O(\xi^{-q_0-1})+O(\xi^{-2q_0-1}). \tag{2.10}$$

当 $q_0$ 为非正的整数时，此结论又要进行修正，利用（2.8）得

（2.11） $$u^{(1)}(\xi)=R(\xi)+O(\xi^{-q_0-1}\log\xi),\qquad q_0=0,-1,2,\cdots.$$

我们将会看到，这种奇性的效应确实很坏。先考察正 $q_0$ 的情况，这时，按（2.10），$u^{(1)}$ 最坏的奇性是 $\xi^{-2q_0-1}$；而在原点 $\xi=x=0$ 附近，二阶项 $\varepsilon u^{(1)}$ 与一阶项 $u^{(0)}$ 之比为 $\varepsilon\xi^{-2q_0-1}/\xi^{-q_0}=\varepsilon\xi^{-q_0-1}$。对小而有限的 $\varepsilon$，此比值当 $\xi\to 0$ 时趋于无穷大，对高阶摄动，这一态势继续保持，对给定的 $\varepsilon$，当 $x=\xi$ 足够小的时候，$u$ 的级数将是发散的。对于非正的 $q_0$，（2.10）中的 $O(\xi^{-q_0-1})$ 项比 $O(\xi^{-2q_0-1})$ 项坏，于是（2.10）和（2.11）都表明，$\varepsilon u^{(1)}$ 与 $u^{(0)}$ 之比为 $\varepsilon\xi^{-1}$，高阶摄动也显示类似的性态，$u$ 的摄动级数在原点附近也是发散的。

PLK 方法的要点当然是利用 $x^{(1)}$ 的附加的自由度来控制 $u^{(1)}$ 的奇性。我们看到，这仅仅需要使（2.9）右端方括号等于 $R(\xi)+O(\xi^{-q_0})$，显然可通过适当选取 $x^{(1)}$ 来实现。实际上，我们甚至可令右端方括号为零，在 I.2 节中确实已这样做了。然而，一般说来只要引入 $\xi$ 的有限项升幂型的展开式就足矣。$q_0<0$ 与 $q_0>0$ 的情形有所不同，我们先来处理 $q_0$ 为正的情形。

## II.2. $q_0>0$ 的情形

图 1 中画的就是这种情形。如（2.7）所示，$u^{(0)}(\xi)$的奇性项为 $A\xi^{-q_0}$，其中 A 是一个由解的边界条件确定的常数，所以（2.9）右端方括号中为害最甚的项为

$$-q_0A\xi^{-q_0}x^{(1)}{}'+q_0A\xi^{-q_0-1}x^{(1)}+A^2q_0\xi^{-2q_0-1}.$$

假如对小的 $\xi$，我们要求有

（2.12） $$x^{(1)}\sim -A\xi^{-q_0}\big/(q_0+1).$$

那么上面这几个项就可消除。做到此点后，对小的 $\xi$，有 $u^{(1)}(\xi)=O(\xi^{-2q_0})$。高阶摄动分析[2]导得类似的结果，当 $\xi\to 0$ 时，我们有

（2.13） $$\begin{aligned}u&=A\xi^{-q_0}+\varepsilon O(\xi^{-2q_0})+\varepsilon^2O(\xi^{-3q_0})+\varepsilon^3O(\xi^{-4q_0})+\cdots,\\ x&=\xi+\varepsilon\left(-\frac{A\xi^{-q_0}}{q_0+1}+\cdots\right)+\varepsilon^2O(\xi^{-2q_0})+\varepsilon^3O(\xi^{-3q_0})+\cdots.\end{aligned}$$

我们暂时令 $A>0$，这类解如图 1 所示。此时，在经典摄动理论中出现麻烦的点 $x=0$ 对应于 $\xi\cong\varepsilon^{1/(q_9+1)}$，所以 $u$ 和 $x$ 的级数的相继的项在 $x=0$ 附近的比值为 $\varepsilon^{1/(q_9+1)}$，于是如果 $\varepsilon$

足够小，$u$ 和 $x$ 的级数是收敛的，经典摄动法的困难就此解决。通过控制 $u^{(j)}(\xi)$和 $x^{(j)}(\xi)$的奇性，使得对于每个 $j$ 它们有类似的奇性，如（2.13）所示，就这样，我们达到了上述目的。

当然，当 $A<0$ 时，也如图 1 所示，在 $x=0$ 之前，解有一个分支点，其位置可由 $x+\varepsilon u=0$ 来确定。于是，准确到一级近似，有

$$\xi-\varepsilon\frac{A\xi^{-q_0}}{q_0+1}+\varepsilon A\xi^{-q_0}\cong 0.$$

所以，对有分支点的情形，有

$$\xi\cong\left(-\frac{\varepsilon Aq_0}{q_0+1}\right)^{1/(q_0+1)},\quad x\cong\left(1+\frac{1}{q_0}\right)\left(-\frac{\varepsilon Aq_0}{q_0+1}\right)^{1/(q_0+1)}. \tag{2.14}$$

根据上一段中的论述，用 PLK 方法所得的解到分支点为止无疑很好。当 $A>0$ 时，不存在实数分支点。

为了了解方法的细节，我们来考虑 Lighthill [2]研究过的如下方程：

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+(2+x)u=0 \tag{2.15}$$

及边界条件

$$u(1)=e^{-1}. \tag{2.16}$$

令 $\xi_1$ 为 $\xi$ 在 $x=1$ 的值，则 $\xi_1$ 由下式确定：

$$1=\xi_1+\varepsilon x^{(1)}(\xi_1)+\varepsilon^2x^{(2)}(\xi_1)+\cdots,$$

或

$$\xi_1=1-\varepsilon x^{(1)}(\xi_1)-\varepsilon^2x^{(2)}(\xi_1)+\cdots.$$

现在可把 $\xi_1$ 的值代入上式中的 $x^{(1)}(\xi_1)$ 和 $x^{(2)}(\xi_1)$，然后把结果依 $\varepsilon$ 的幂次展开，所以有

$$\begin{aligned}\xi_1&=1-\varepsilon[x^{(1)}(1)-\varepsilon x^{(1)}(1)x^{(1)}{}'(1)]-\varepsilon^2x^{(2)}(1)+\cdots\\&=1-\varepsilon x^{(1)}(1)-\varepsilon^2[x^{(2)}(1)-x^{(1)}(1)x^{(1)}{}'(1)]+\cdots.\end{aligned}$$

于是边界条件（2.10）可写成

$$e^{-1}=u^{(0)}(1)-u^{(0)}{}'(1)\varepsilon x^{(1)}(1)+\varepsilon u^{(1)}(1)+\cdots$$

或

$$\begin{aligned}&u^{(0)}(1)=e^{-1}\\&u^{(1)}(1)=u^{(0)}{}'(1)x^{(1)}(1),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned} \tag{2.17}$$

式（2.17）为转换成变量 $\xi$ 时的边界条件。

现在，零阶方程为

$$\xi\frac{du^{(0)}}{d\xi}+(2+\xi)u^{(0)}=0.$$

利用边界条件（2.17），我们得到

（2.18）　$$u^{(0)}(\xi)=e^{-\xi}\xi^{-2}.$$

根据（2.9），一阶方程为

$$\frac{d}{d\xi}\left[u^{(1)}(\xi)e^{\xi}\xi^{2}\right]=\frac{1}{\xi}\Big[-(2+\xi)e^{-\xi}\xi^{-2}x^{(1)}{}'-\left\{e^{-\xi}\xi^{-2}-e^{-\xi}\xi^{-2}-2e^{-\xi}\xi^{3}\right\}x^{(1)}$$

$$-e^{-\xi}\xi^{-2}\left\{-e^{-\xi}\xi^{-2}-2e^{-\xi}\xi^{-3}\right\}\Big]e^{\xi}\xi^{2}$$

$$=\frac{1}{\xi}\left[-(2+\xi)x^{(1)}{}'+\frac{2}{\xi}x^{(1)}+e^{-\xi}\xi^{-2}\left(1+\frac{2}{\xi}\right)\right].$$

可以看到，若令

$$x^{(1)}{}'-\frac{1}{\xi}x^{(1)}=\frac{1}{\xi^{3}},$$

或

(2.19)　$$x^{(1)}(\xi)=-\frac{1}{3\xi^{2}},$$

$u^{(1)}$的最坏的奇性就可以消除了。采用这个 $x^{(1)}$，$u^{(1)}$的方程化为

$$\frac{d}{d\xi}\left[u^{(1)}(\xi)e^{\xi}\xi^{2}\right]=\frac{1}{\xi}\left[-\xi x^{(1)}{}'-\frac{2}{\xi^{3}}+e^{-\xi}\xi^{-2}\left(1+\frac{2}{\xi}\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{3}\frac{1}{\xi^{3}}-\frac{2}{\xi^{4}}+e^{-\xi}\left(\frac{1}{\xi^{3}}+\frac{2}{\xi^{4}}\right).$$

在边界条件（2.17）下，我们就解得

(2.20)　$$u^{(1)}(\xi)=e^{-\xi}\xi^{-2}\left[\frac{2}{3}\frac{1}{\xi^{3}}+\frac{1}{3}\frac{1}{\xi^{2}}-\int_{\xi}^{1}e^{-\xi}\left(\frac{2}{\xi^{4}}+\frac{1}{\xi^{3}}\right)d\xi\right].$$

二阶方程为

$$\xi u^{(2)}{}'+\left(2+\xi\right)u^{(2)}=-\left(x^{(1)}+u^{(0)}\right)u^{(1)}{}'-\left(x^{(2)}+u^{(1)}\right)u^{(0)}{}'$$

$$-x^{(2)}u^{(0)}-x^{(1)}u^{(1)}-x^{(1)}{}'\left\{(2+\xi)u^{(1)}+x^{(1)}u^{(0)}\right\}-x^{(2)}{}'\left(2+\xi\right)u^{(0)}.$$

为了消除 $u^{(2)}$的最坏的奇性，我们令

(2.21)　$$\xi\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x^{(2)}}{\xi}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{\xi^{5}}$$　或　$$x^{(2)}\left(\xi\right)=-\frac{3}{10}\frac{1}{\xi^{4}}.$$

合并到此所得的结果，我们有

(2.22)
$$u=e^{-\xi}\xi^{-2}+\varepsilon\left[e^{-\xi}\xi^{-2}\left\{\frac{2}{3\xi^{3}}+\frac{1}{3\xi^{2}}-\int_{\xi}^{1}e^{-\xi}\left(\frac{2}{\xi^{4}}+\frac{1}{\xi^{3}}\right)d\xi\right\}\right]+O\left(\frac{\varepsilon^{2}}{\xi^{6}}\right)$$

$$x=\xi-\frac{\varepsilon}{3\xi^{2}}-\frac{3\varepsilon^{2}}{10\xi^{4}}+O\left(\frac{\varepsilon^{2}}{\xi^{6}}\right).$$

现经简单的计算可知，在 $x=0$ 处有

$$(2.23)\qquad \begin{aligned} \xi &= \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/3} + \frac{9}{10}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{2/3} + O(\varepsilon) \\ u &= \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{2/3} - 27\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{1/3} + O(1). \end{aligned}$$

（*漏了一段：）对于当前这个方程，按照（2.18），当$\xi \to 0$时$u^{(0)} \sim 1/\xi^2$，因此，$A$是正数，不出现实数分支点。

有些情况下，可以令头几个$x^{(j)}$等于零而丝毫不影响解的有效性。例如，若$A = \lim\limits_{\xi\to 0} \xi^{q_0} u^{(0)}(\xi)$恰好由于问题的边界条件而等于零，那么$u^{(1)}$中最坏的奇性自动消失，也就不需要引入$x^{(1)}$了。一般说来，如果$j<i$时，$\lim\limits_{\xi\to 0} \xi^{q_0} u^{(j)}(\xi)$=0，那么第一个非零的$x^{(j)}$将是$x^{(i)}$。

## II.3. $q_o = 0$的情形

在这一情形，当$\xi \to 0$时$u^{(0)}(\xi)$有对数奇性：

$$(2.24)\qquad u^{(0)}(\xi) = r_0 \log \xi + B + O(\xi \log \xi).$$

令(2.9)右端方括号中奇性最严重的项等于零，我们得到

$$x^{(1)}{}' - \frac{1}{\xi} x^{(1)} = \xi \frac{d}{d\xi}\left(\frac{x^{(1)}}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi}\left[r_0 \log \xi + B\right].$$

于是有

$$(2.25)\qquad x^{(1)}(\xi) = -r_0 \log \xi - (r_0 + B).$$

一般地说，当$\xi \to 0$时我们发现(参看[2])

$$(2.26)\qquad u^{(j)} = O\left(\log^{2j+1} \xi\right) \qquad\qquad x^{(j)} = O\left(\log^{2j-1} \xi\right).$$

因此，$u$和$x$的级数的相继项之比具有$\varepsilon \log^2 \xi$的量级，而(2.25)表明，到一级近似，

$$x \cong \xi - \varepsilon\left[r_0 \log \xi + r_0 + B\right].$$

所以$x$=0对应于$\xi \cong \varepsilon \log \varepsilon$，由此可见，PLK方法给出的级数的收敛半径约为$\varepsilon^{-1} \log^{-2} \varepsilon$，对于小$\varepsilon$来说，这比$\varepsilon$大多了。在$x+\varepsilon u$=0处解出现分支点，即出现在$\xi = \varepsilon r_0 + O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon)$时，或即

$$(2.27)\qquad x = -\varepsilon r_0 \log(\varepsilon r_0) - \varepsilon B + O\left(\varepsilon^3 \log^3 \varepsilon\right),$$

时，对于小 $\varepsilon$ 来说，当 $r_0 > 0$ 时，它是正实数；当 $r_0 < 0$ 时，不出现实数分支点。

## II.4. $q_0 < 0$ 的情形

当 $q_0$ 为负值时，零阶解 $u^{(0)}$ 在 $\xi$＝0 处实际上是有限的，我们会由此认为情况不会像前两节所研究的 $q_0 \geq 0$ 时那样糟糕。然而，事实证明，这种想法是靠不住的，而 PLK 方法不一定给出直到原点 $x$＝0 的收敛解。我们先来讨论较简单的 $q_0 \leq -1$ 的情形。在 II.1 节中我们已经证明，在经典的摄动理论中，$u^{(1)}$ 里带来麻烦的项是(2.10)中的 $O(\xi^{-q_0-1})$，它是(2.9)右端中括号里的 $u^{(0)}u^{(0)}{}'$ 产生的。要去掉此项，只需要取 $x^{(1)}$为一个非零的常数，其值由下式确定：

(2.28) $$-x^{(1)} - u^{(0)}(0) = 0.$$

事实上，所有后继的 $x^{(j)}$均可取为常数。因此 $x$ 与 $\xi$ 的差别在于一个依赖于 $\varepsilon$ 的常数。为了证明此点，方便的做法是从下列变换着手：

(2.29) $$x = \xi + \alpha, \qquad u = v + \beta,$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 为待定常数。$v$ 和 $\xi$ 满足的方程为

$$\left\{\xi + \varepsilon v + (\alpha + \varepsilon\beta)\right\}\frac{dv}{d\xi} = -q(\xi+\alpha)(v+\beta) + r(\xi+\alpha).$$

现在我们要求 $\xi$＝$v$＝0 时除了方程右端等于零之外 $dv/d\xi$ 的系数也为零，通过这种方式来确定 $\alpha$ 和 $\beta$。于是点 $\xi$＝$v$＝0 实际上为结点，所以有

(2.30) $$\alpha + \varepsilon\beta = 0, \qquad q(\alpha)\cdot\beta = r(\alpha).$$

从这组方程可确定 $\alpha$ 和 $\beta$ 作为 $\varepsilon$ 的函数。而且，因为假定 $q$ 和 $r$ 为正则函数，$\alpha$ 和 $\beta$ 可展开成幂级数。

现在，经变换的方程有如下形式：

(2.31) $$(\xi + \varepsilon v)\frac{dv}{d\xi} + q(\xi)v = r(\xi), \qquad r_0 = r(0) = 0.$$

令 $q_0 = q(0) \leq -1$。方程(2.31)可用经典的摄动法求解，且有

(2.32) $$v = v^{(0)}(\xi) + \varepsilon v^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 v^{(2)}(\xi) + \cdots.$$

将 $\alpha$ 展开为 $\varepsilon$ 的幂级数后可给出所有的 $x^{(j)}$。零阶解为

(2.33) $$v^{(0)}(\xi) = \exp\left(-\int\frac{q}{\xi}d\xi\right)\int\frac{r}{\xi}\exp\left(\int\frac{q}{\xi}d\xi\right)d\xi = \xi R(\xi) + O\left(\xi^{-q_0}\log^{\mu}\xi\right),$$

其中当 $q_0$ 为负整数时 $\mu$ 为 1，否则为零。Lighthill 经分析指出，高阶摄动由下式给出：

(2.34) $\quad v^{(j)}(\xi)=\xi R(\xi)+O\left(\xi^{-q_0}\log^{\nu j+\mu}\xi\right),$

其中当 $q_0=-1$ 时 $\nu=2$，否则 $\nu=1$。于是，当$\xi\to 0$时 $v$ 的级数(2.32)的相继项之比为 $O(\varepsilon\log^{\nu}\xi)$，这似乎表明上述级数关于$\xi$的收敛半径为$O(-\text{const.}/\varepsilon^{1/\nu})$，换句话说，我们的解有效的最小的$\xi$是$O(-\text{const.}/\varepsilon^{1/\nu})$。尽管它比$\varepsilon$的任何幂次都小，这仍然意味着点$\xi$＝0（即结点）不能达到。更糟糕的是，根据(2.29)，$x$比$\xi$值大$\alpha$，若$\alpha$为正，则我们的解在$x$的从$x$＝0 到稍大于$\alpha$值的范围里失效。当然，如果事实表明物理问题所要求的解不包含上述招致麻烦的范围，那么 PLK 方法还是完全成功的。

$-1<q_0<0$兼有$q_0\geq 0$情形和$q_0\leq -1$情形的特性。对我们的分析来说，方便的做法是再次应用变换(2.29)以及(2.30)。所以我们要考虑的方程具有(2.1)的形式，且有 $r_0$＝0 和 $-1<q_0<0$，于是 $u$＝$x$＝0 为结点，这里需要用完整的双重展开(2.2)。Lighthill 证明了，当 $\xi\to 0$时有

(2.35) $\quad x^{(j)}(\xi)=O\left(\xi^{-q_0}\log^{j-1}\xi\right)\qquad u^{(j)}(\xi)=O\left(\xi^{-q_0}\log^{j}\xi\right).$

我们的方法的实质还是控制$x^{(j)}(\xi)$和$u^{(j)}(\xi)$的奇性，具体做法是：对于每一$j$，让两个函数具有相类似的奇性。与$q_0\leq -1$的情形一样，级数关于$\xi$的收敛半径仍为$O(-\text{const.}/\varepsilon^{1/\nu})$的量级，点$\xi$＝0 必须排除在外。然而，解的分支点通常在达到$\xi$＝0 之前就已出现；物理问题不要求招致麻烦的点附近的解，PLK 方法可给出令人满意的解。

作为这一情形的一个例子，我们来考虑 Lighthill 研究过的方程

(2.36) $\quad (y+\varepsilon w)\dfrac{dw}{dy}-\dfrac{1}{2}w=1+y^2$

边界条件为

(2.37) $\quad w(1)=-1.$

根据(2.30)中的第一个方程，所需要的预备性变换(2.29)可写成

(2.38) $\quad y=x+\alpha,\qquad w=u-\left(\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right)$

于是由(2.30)中的第二个方程得到

$$\alpha^2-\frac{1}{2\varepsilon}\alpha+1=0,$$

或者，因为当$\varepsilon\to 0$时$\alpha\to 0$，故有

(2.39) $\quad \alpha=\dfrac{1}{4\varepsilon}\left[1-\sqrt{1-16\varepsilon^2}\right]=2\varepsilon+8\varepsilon^3+\cdots.$

结果，方程变为

(2.40) $$\left(x+\varepsilon u\right)\frac{du}{dx}-\frac{1}{2}u=2\alpha x+x^{2}.$$

现在边界条件变成

$$u=\frac{\alpha}{\varepsilon}-1 \qquad \text{在}\, x=1-\alpha.\,\text{处}$$

利用展开式(2.2)，我们得到

$$\begin{aligned}1+8\varepsilon^{2}+\cdots=u^{(0)}\left(1\right)+\varepsilon\left\{-u^{(0)}{}'(1)\left[2+x^{(1)}\left(1\right)\right]+u^{(1)}\left(1\right)\right\}\\+\varepsilon^{2}\left\{u^{(0)}{}'(1)\left[2x^{(1)}{}'(1)-x^{(2)}\left(1\right)\right]+\frac{1}{2}u^{(0)}{}''(1)\left[2+x^{(1)}\left(1\right)\right]^{2}\right.\\\left.-u^{(1)}{}'(1)\left[2+x^{(1)}\left(1\right)\right]+u^{(2)}\left(1\right)\right\}+\cdots\cdots.\end{aligned}$$

于是转换后的边界条件为

(2.41) $$\begin{aligned}&u^{(0)}\left(1\right)=1,\\&u^{(1)}\left(1\right)=u^{(0)}{}'(1)\left[2+x^{(1)}\left(1\right)\right],\\&u^{(2)}\left(1\right)=u^{(1)}{}'(1)\left[2+x^{(1)}\left(1\right)\right]-\frac{1}{2}u^{(0)}{}''(1)\left[2+x^{(1)}\left(1\right)\right]^{2}\\&\qquad\qquad-u^{(0)}{}'(1)\left[2x^{(1)}{}'(1)-x^{(2)}\left(1\right)\right],\end{aligned}$$

零阶方程为

(2.42) $$\xi\frac{du^{(0)}}{d\xi}-\frac{1}{2}u^{(0)}=\xi^{2}.$$

利用(2.41)给出的边界条件的第一式，可得上述方程的解

(2.43) $$u^{(0)}\left(\xi\right)=\frac{1}{3}\xi^{1/2}+\frac{2}{3}\xi^{2}.$$

一阶方程为

(2.44) $$\begin{aligned}\xi\frac{du^{(1)}}{d\xi}-\frac{1}{2}u^{(1)}=\left(\xi^{2}+\frac{1}{2}u^{(0)}\right)x^{(1)}{}'+\left(2\xi-u^{(0)}{}'\right)x^{(1)}\\+\left(4\xi-u^{(0)}u^{(0)}{}'\right).\end{aligned}$$

为了去掉方程右端奇性最严重的项，我们令

$$\xi^{1/2}x^{(1)}{}'-\frac{1}{\xi^{1/2}}x^{(1)}=\frac{1}{3},$$

或

(2.45) $$x^{(1)}=-\frac{2}{3}\xi^{1/2}.$$

完整的解为

$$u=\frac{1}{3}\xi^{1/2}+\frac{2}{3}\xi^{2}+\varepsilon\left(-\frac{21}{5}\xi^{1/2}+8\xi-\frac{13}{9}\xi^{3/2}-\frac{16}{45}\xi^{3}\right)+O\left(\varepsilon^{2}\xi^{1/2}\log\xi\right),$$

$$x=\xi-\frac{2}{3}\varepsilon\xi^{1/2}+\frac{42}{5}\varepsilon^{2}\xi^{1/2}+O\left(\varepsilon^{3}\xi^{1/2}\log\xi\right).$$

我们可以利用(2.38)和(2.39)给出用 $w$ 和 $y$ 表示的解：

$$w=-2+\frac{1}{3}\xi^{1/2}+\frac{2}{3}\xi^{2}+\varepsilon\left(-\frac{21}{5}\xi^{1/2}+8\xi-\frac{13}{9}\xi^{3/2}-\frac{16}{45}\xi^{3}\right)+O\left(\varepsilon^{2}\right),\tag{2.46}$$

$$y=\xi+\varepsilon\left(2-\frac{2}{3}\xi^{1/2}\right)+\frac{42}{5}\varepsilon^{2}\xi^{1/2}+O\left(\varepsilon^{3}\right).$$

当然，事先不采用变换(2.38)也可以得到这个解。直接把 $w$ 和 $y$ 的双重展开式代入方程，也给出相同的解。但是，采用预备性变换经常更方便一些。

在 $du/d\xi=0$ 的点，$y$ 与 $\xi$ 的关系开始折转，我们就有了解的分支点，利用这一条件，我们得知，在分支点上有

$$\xi=\frac{1}{9}\varepsilon^{2}-\frac{14}{5}\varepsilon^{3}+O\left(\varepsilon^{4}\right),\tag{2.47}$$

$$y=2\varepsilon-\frac{1}{9}\varepsilon^{2}+\frac{14}{5}\varepsilon^{3}+O\left(\varepsilon^{4}\right).$$

于是，分支点出现在解于 $\xi=0$ 处失效之前。

## II.5 要求采用边界层方法的方程

应该记得，在前面讨论微分方程(2.1)时我们附加了条件：$q(x)$和 $r(x)$在 $x=0$ 处是正则的，正因为 $q(x)$和 $r(x)$是正则的，当 $x$ 按(2.2)的第二式被取代为 $\xi$ 时，我们可以把这两个函数展开成关于 $\varepsilon$ 的一致有效幂级数。因为我们要求通过这种展开产生如(2.3)所示的逐阶的方程，所以(2.1)中 $q(x)$和 $r(x)$的正则性对 PLK 方法的成功应用极其重要。如果 $q(x)$或 $r(x)$（甚或二者）在 $x=0$ 处不是正则的，那么该方程就不能用 PLK 方法求解，而必须用某种不同的方法（如边界层方法）来处理。

这一见解得到了 Carrier[6,7]的研究结果的支持，例如，他发现如下的方程就不能用 PLK 方法求解：

$$\left(z^{2}+\varepsilon u\right)\frac{du}{dz}+u=\left(2z^{3}+z^{2}\right).\tag{2.48}$$

倘若我们采用变换 $z^2=x$，就立即可见，这是我们的正则性条件的必然后果。作了变换后，(2.48)变成

$$\left(x+\varepsilon u\right)\frac{du}{dx}+\frac{1}{2\sqrt{x}}u=\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right).\tag{2.49}$$

此方程现在有我们的标准形式，但 $q(x)$和 $r(x)$ 在 $x=0$ 处不是正则的了，PLK 方法在本例中一定失效。当然，有人会争辩说，我们可以对原方程(2.48)中的 $z$ 展开，而不是对经变换的方程(2.49)中的 $x$ 展开。但这只不过是一种错觉，因为关于 $z$ 或关于 $x$ 的幂级数展开实际上并无差别，若此方法对 $x$ 形式失败了，对 $z$ 形式也一定失败。

## II.6 二阶方程

高阶方程若有正则奇点，且像以上各节讨论过的那样，零阶解在临界点有代数奇性或

对数奇性，则可用类似的方法来处理。方便的做法是：把这种高阶方程表示成一组联立的一阶方程组。例如，方程

$$\left(x+\varepsilon\frac{dv}{dx}+\varepsilon av\right)\frac{d^2v}{dx^2}+q(x)\frac{dv}{dx}+S(x)v=r(x) \tag{2.50}$$

可改写成

$$(x+\varepsilon u+\varepsilon av)\frac{du}{dx}+q(x)u+S(x)v=r(x),\qquad \frac{dv}{dx}=u. \tag{2.51}$$

现在，该方程的奇性出现在（$x$，$u$，$v$）空间中的平面 $x+\varepsilon u+\varepsilon av=0$ 上。为了用 PLK 方法处理此方程，我们把 $x$，$u$，$v$ 代换成如下的展开式：

$$\begin{aligned} x&=\xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi)+\varepsilon^2x^{(2)}(\xi)+\cdots,\\ u&=u^{(0)}(\xi)+\varepsilon u^{(1)}(\xi)+\varepsilon^2u^{(2)}(\xi)+\cdots,\\ v&=v^{(0)}(\xi)+\varepsilon v^{(1)}(\xi)+\varepsilon^2v^{(2)}(\xi)+\cdots. \end{aligned} \tag{2.52}$$

于是由(2.51)的第二个方程得到

$$v^{(0)}{}'+\varepsilon v^{(1)}{}'+\varepsilon^2v^{(2)}{}'+\cdots=\left[1+\varepsilon x^{(1)}{}'+\varepsilon^2x^{(2)}{}'+\cdots\right]\times \left[u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots\right]. \tag{2.53}$$

于是，零阶方程为

$$\xi\frac{du^{(0)}}{d\xi}+q(\xi)u^{(0)}+S(\xi)v^{(0)}=r(\xi),\qquad \frac{dv^{(0)}}{d\xi}=u^{(0)}. \tag{2.54}$$

当 $q_0>0$ 时，当 $\xi$ 很小时，与 $u^{(0)}$ 相比，$v^{(0)}$ 可以忽略，且当 $\xi\to0$ 时 $u^{(0)}\sim A\xi^{-q_0}$。量 $v^{(0)}$ 由(2.54)的第二个方程经由某种边界条件下的积分得到。当 $q_0\ge0$ 时，如 II.4 节所述，$x^{(j)}$ 仍可取为常数。但现在用类似于(2.30)的条件不能确定 $x^{(j)}$，因为对伴随 $u$，$v$，$x$ 的三个偏移常数来说，只有两个条件，$x^{(j)}$ 必须由微分方程和边界条件确定。如下的普遍规则成立：在 $u^{(0)}(\xi)$，$u^{(1)}(\xi)$，$\ldots u^{(k-1)}(\xi)$；$v^{(0)}(\xi)$，$v^{(1)}(\xi)$，$\ldots v^{(k-1)}(\xi)$；$x^{(0)}(\xi)$，$x^{(1)}(\xi)$，$\ldots x^{(k-1)}(\xi)$ 确定之后，通过要求 $x+\varepsilon u+\varepsilon av$ 中 $\varepsilon^k$ 的系数为零，来确定 $x^{(k)}$。于是就防止了因子 $\xi^{-1}$ 导致的 $u^{(k)}$ 和 $v^{(k)}$ 的奇性的逐阶增强。当 $-1<q_0<0$ 时，与 II.4 节讨论过的做法类似，有必要将常数偏移与自变量展开结合起来。

图 2 膨胀圆柱产生的柱面激波

（图中字：SHOCK—激波；AT TIME $t$—在时刻 $t$）

作为将 PLK 方法应用于二阶方程的例子，我们来解决由固体圆柱面从零半径开始在空气中均匀膨胀所产生的柱面激波问题；假定空气是无粘绝热完全气体。这个例子也由 Lighthill[2]讨论过。我们用 $r$ 表示离圆柱中心的距离；$t$ 表示圆柱半径为零起算的时间（图 2）。因为不存在基本的长度和时间，所以所有的速度和压力一定依赖于参数 $r/t$。若 $a_0$ 为静止空气中的音速，我们就可把速度势 $\phi$ 写成

$$\phi = a_0{}^2 t f\left(x\right), \tag{2.55}$$

其中 $x$ 为无量纲参数：

$$x = r\big/a_0 t. \tag{2.56}$$

令膨胀柱面的速度为 $\varepsilon a_0$，柱面由 $x=\varepsilon$ 确定，激波位于 $Ma_0t$，于是流动区域为 $\varepsilon \le x \le M$ 。因为激波有均匀强度，所以激波后的流动是绝热的，Bernoulli 方程成立，亦即，当地音速 $a$ 由下式确定：

$$a^2 = a_0{}^2\left[1-\left(\gamma-1\right)\left(f - xf' + \frac{1}{2}f'^2\right)\right], \tag{2.57}$$

其中，撇号代表关于 $x$ 求导，$\gamma$ 为空气的比热比。

速度势 $\phi$ 满足的方程为

$$a^2\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial t} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}.$$

用(2.55)中的 $f$ 来表示，我们有

$$\left[1-\left(\gamma-1\right)\left(f - xf' + \frac{1}{2}f^2\right)\right]\left[f'' + \frac{1}{x}f'\right] = \left(x - f'\right)^2 f''. \tag{2.58}$$

边界条件由如下要求来确定：（i）柱面上气体的速度等于柱面的运动速度；（ii）激波面上 $\phi$ 是连续的，而静止空气中 $\phi = 0$，因此激波上 $\phi = 0$；（iii）激波速度与激波后的流体速度必须满足 Rankine-Hugoniot 关系。用 $f$ 来表达，我们得到如下三个边界条件：

$$\begin{aligned} &f'\left(\varepsilon\right) = \varepsilon, \\ &f\left(M\right) = 0, \\ &f'\left(M\right) = 2\left(M - \frac{1}{M}\right)\Big/\left(\gamma+1\right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

因为对一个二阶方程有三个边界条件，我们应该找到一个 $\varepsilon$ 与 $M$ 的关系，或即柱面膨胀速度与激波速度之间的关系。

为了把问题以熟悉的形式来表述，我们令

$$f' = u, \qquad f = v. \tag{2.60}$$

于是(2.58)变成

$$\left[1-x^2+(\gamma+1)xu-(\gamma-1)v-\frac{1}{2}(\gamma+1)u^2\right]\frac{du}{dx}$$

$$(2.61)\qquad +\frac{u}{x}\left[1+(\gamma-1)\left(xu-v-\frac{1}{2}u^2\right)\right]=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=u.$$

于是，边界条件为

$$(2.62)\qquad u(\varepsilon)=\varepsilon,\qquad u(M)=\frac{2}{(\gamma+1)}\left(M-\frac{1}{M}\right),$$

$$v(M)=0.$$

当 $\varepsilon$ 很小时，$u$ 和 $v$ 为小量，(2.61)近似成

$$(2.63)\qquad \left(1-x^2\right)\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=0,\qquad \frac{dv}{dx}=u.$$

因此边界条件(2.62)下的解为

$$(2.64)\qquad u=\varepsilon^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1},\qquad M=1$$

$$v=\int_1^x u\,dx,$$

它在 $x=1$ 处有奇性，对应于 $q_0=-1/2$，所以问题属于 $-1<q_0<0$ 的情形。对 $x>1$，解(2.64)不存在，而对精确解来说，$M$（激波速度与音速之比）必须大于 1。于是，很明显，需要采用 PLK 方法。零级近似表明，我们应采用如下的展开式：

$$(2.65)\qquad \begin{aligned} u&=\varepsilon^2u^{(0)}(\xi)+\varepsilon^4u^{(1)}(\xi)+\cdots,\\ v&=\varepsilon^2v^{(0)}(\xi)+\varepsilon^4v^{(1)}(\xi)+\cdots,\\ x&=\xi+\varepsilon^2x^{(1)}(\xi)+\varepsilon^4x^{(2)}(\xi)+\cdots,\\ M&=1+\varepsilon^2M^{(1)}+\varepsilon^4M^{(2)}+\cdots. \end{aligned}$$

其中 $u^{(0)}(\xi)$ 和 $v^{(0)}(\xi)$ 当然由(2.64)给出，或即

$$(2.66)\qquad \begin{aligned} u^{(0)}(\xi)&=\sqrt{\frac{1}{\xi^2}=1},\\ v^{(0)}(\xi)&=\int_1^\xi u^{(0)}(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

现在因为奇性出现在 $\xi=1$ 处，$(1-\xi)$起前几节中 $\xi$ 的作用。按照 $-1<q_0<0$ 情形的一般理论，$x^{(1)}$，$x^{(2)}$，…的最重要的项为常数，尽管还要有 $(1-\xi)^{1/2}$ 乘以 $\log(1-\xi)$各次幂那样的

项，如(2.35)所示。(2.61)中 $du/dx$ 前的因子里 $\varepsilon^2$ 的系数为

$$-2\xi x^{(1)}+(\gamma+1)\xi u^{(0)}-(\gamma-1)v^{(0)}.$$

按照本节开首所述的一般规则，在奇点 $\xi=1$ 处上述和式应为零，但(2.66)表明，在 $\xi=1$ 处 $u^{(0)}$ 和 $v^{(0)}$ 为零，所以我们取

(2.67) $$x^{(1)}=0.$$

$x^{(1)}$ 取此值后，$u^{(1)}$ 的方程成为

(2.68) $$\begin{aligned}&\left(1-\xi^2\right)u^{(1)\prime}+\frac{1}{\xi}u^{(1)}+\left[(\gamma+1)\xi u^{(0)}-(\gamma-1)v^{(0)}\right]u^{(0)\prime}\\&\qquad+\frac{1}{\xi}u^{(0)}\left[(\gamma-1)\xi u^{(0)}-(\gamma-1)v^{(0)}\right]=0.\end{aligned}$$

若此方程中 $\xi\to1$，则得到

(2.69) $$u^{(1)}(1)=-(\gamma+1)\lim_{\xi\to1}\left[u^{(0)}u^{(0)\prime}\right]=\gamma+1.$$

为了计算 $v^{(1)}(1)$，我们必须利用边界条件。令 $\xi_1$ 为对应于激波的 $\xi$ 值，则按照(2.62) 和(2.65)，考虑到(2.67)，我们有

(2.70) $$\begin{aligned}&\xi_1+\varepsilon^4x^{(2)}(\xi_1)+\cdots=M,\\&\varepsilon^2v^{(0)}(\xi_1)+\varepsilon^4v^{(1)}(\xi_1)+\cdots=0,\\&\varepsilon^2u^{(0)}(\xi_1)+\varepsilon^4u^{(1)}(\xi_1)+\cdots=\frac{2}{(\gamma+1)}\left(M-\frac{1}{M}\right).\end{aligned}$$

但是由(2.66)和(2.69)得知，当 $\xi\to1$ 时，$u^{(0)}\cong\sqrt{2(1-\xi)}$，$u^{(1)}\cong\gamma+1$，于是(2.70)的第一、三式变成

$$\begin{aligned}&M=\xi_1+O\left(\varepsilon^4\right),\\&\frac{2}{(\gamma+1)}\frac{M+1}{M}(M-1)=\varepsilon^2\sqrt{2(1-\xi_1)}+\varepsilon^4(\gamma+1).\end{aligned}$$

所以有

(2.71) $$\xi_1=1-O\left(\varepsilon^4\right)$$

(2.72) $$M-1=O\left(\varepsilon^4\right).$$

于是，根据(2.66)给出的 $v^{(0)}$，有

(2.73) $$v^{(0)}\left(\xi_1\right)=O\left(\varepsilon^6\right).$$

因此，边界条件的第二式给出

(2.74) $$v^{(1)}\left(1\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-2}v^{(0)}\left(\xi_1\right)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-2}O\left(\varepsilon^6\right)\right]=0.$$

利用已经确定的值，在 $\xi$＝1 处，(2.61)中 $du/dx$ 的系数里 $\varepsilon^4$ 的系数为

$$\lim_{\xi\to 1}\left[-2\xi x^{(2)}+\left(\gamma+1\right)\xi u^{(1)}-\left(\gamma-1\right)v^{(1)}-\frac{1}{2}\left(\gamma+1\right)\left(u^{(0)}\right)^2\right]$$
$$=-2x^{(2)}+\left(\gamma+1\right)^2.$$

按照上述一般原理，这个和式必须为零，所以有

(2.75) $$x^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\gamma+1\right)^2+O\left(\sqrt{1-\xi}\log\left(1-\xi\right)\right).$$

因此，合并边界条件(2.70)的第一、三式，我们得到

$$\varepsilon^2\sqrt{2\left(1-M\right)+\varepsilon^4\left(\gamma+1\right)^2}+\varepsilon^4\left(\gamma+1\right)+O\left(\varepsilon^6\log\varepsilon\right)$$
$$=\frac{4}{\gamma+1}\left(M-1\right)+O\left[\left(M-1\right)^2\right].$$

从中解出 $M$－1，我们最后得到

(2.76) $$M=1+\frac{3}{8}\left(\gamma+1\right)^2\varepsilon^4+O\left(\varepsilon^6\log\varepsilon\right).$$

(2.76)式给出了所要求的 $M$ 与 $\varepsilon$ 的关系式。应注意，这里仅用很少的实际计算步骤就得到了这一结果，而 Lighthill 本人曾用另一种方法得到了同样的结果[8]，但经过相当繁复的计算才成功。因此，新方法的威力得到了清晰的演示。

## II.7 非正则奇点

现在我们考虑微分方程

(2.77) $$\frac{d^2u}{dx^2}+u=\varepsilon f\left(u,\frac{du}{dx}\right).$$

如果我们把 $x$ 认定为时间，此方程描述了带小非线性项的电学系统或机械系统，这种系统经常出现自激振动，其周期与 $\varepsilon$＝0 时的简谐振动周期 2π 大不相同。这种自激振动周期解称为系统的极限环，它实际上代表了 Poincaré 问题。如果我们采用经典的摄动法，将 $u$ 替代为

$$u=u^{(0)}\left(x\right)+\varepsilon u^{(1)}\left(x\right)+\varepsilon^2u^{(2)}\left(x\right)+\cdots.$$

零阶方程为

$$\frac{d^2u^{(0)}}{dx^2}+u^{(0)}=0.$$

于是，$x$＝∞为这个微分方程的非正则奇点。我们可以取零阶解为

$$u^{(0)}=A\sin x.$$

于是一阶方程为

$$u^{(1)}{}''+u^{(1)}=f\left(A\sin x,\,A\cos x\right).$$

对 $f\left(A\sin x, A\cos x\right)$ 作 Fourier 分析，我们有

$$f\left(A\sin x,\,A\cos x\right)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

我们现在可以容易地确定 $u^{(1)}$ 为

$$\begin{aligned}u^{(1)}\left(x\right)&=\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2}x\sin x-\frac{b_1}{2}x\cos x\\&\quad+\sum_2^\infty\left(\frac{a_n}{1-n^2}\cos nx+\frac{b_n}{1-n^2}\sin nx\right)+B\sin x+C\cos x.\end{aligned}$$

当 $x\to\infty$ 时，$u^{(1)}$ 有如 $xe^{ix}$ 那样的性态，于是，点 $x=\infty$ 为摄动方程的奇点。高阶解具有同样的一般特性，摄动级数当 $x\to\infty$ 时发散。

为了用 PLK 方法处理这一问题，我们把(2.2)代入(2.77)，就有

$$\begin{aligned}&\frac{u^{(0)}{}''+\varepsilon u^{(1)}{}''+\varepsilon^2u^{(2)}{}''+\cdots}{\left(1+\varepsilon x^{(1)}{}'+\varepsilon^2x^{(2)}{}'+\cdots\right)^2}\\&\quad-\frac{\left(u^{(0)}{}'+\varepsilon u^{(1)}{}'+\varepsilon^2u^{(2)}{}'+\cdots\right)\left(\varepsilon x^{(1)}{}''+\varepsilon^2x^{(2)}{}''+\cdots\right)}{\left(1+\varepsilon x^{(1)}{}'+\varepsilon^2x^{(2)}{}'+\cdots\right)^3}\\&\quad+u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots=\varepsilon f\left(u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\cdots,\right.\\&\qquad\qquad\left.\frac{u^{(0)}{}'+\varepsilon u^{(1)}{}'+\cdots}{1+\varepsilon x^{(1)}{}'+\cdots}\right).\end{aligned}\tag{2.78}$$

除了用 $\xi$ 取代了 $x$ 以外，其零阶解的形式与经典的摄动法给出的相同。于是有

$$u^{(0)}\left(\xi\right)=A\sin\xi.\tag{2.79}$$

但是现在的一阶解为

$$\begin{aligned}u^{(1)}{}''+u^{(1)}&=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos\xi+b_1\sin\xi-2Ax^{(1)}{}'\sin\xi\\&\quad+Ax^{(1)}{}''\cos\xi+\sum_2^\infty\left(a_n\cos n\xi+b_n\sin n\xi\right).\end{aligned}\tag{2.80}$$

(2.80)式右端导致麻烦的项与 $\sin\xi$ 和 $\cos\xi$ 相关，若令

$$x^{(1)}=\frac{b_1}{2A}\xi,\qquad x^{(1)}{}''=0.\tag{2.81}$$

可以消除掉 $\sin\xi$ 项。因为从 $x^{(1)}$ 得不到任何帮助，我们令 $a_1=0$，以消除 $\cos\xi$ 项，换句话说，令

(2.82) $$\int_0^{2\pi} f\left(A\sin\xi, A\cos\xi\right)\cos\xi \, d\xi = 0.$$

此式实际上确定了振动的振幅 $A$。这一自激振动或极限环的周期是当 $\xi$ 改变了 2π 时 $x$ 的改变值，这是因为现在 $u^{(0)}\left(\xi\right)$ 和 $u^{(1)}\left(\xi\right)$ 的周期为 2π。于是，根据(2.81)，周期为

(2.83) $$2\pi\left[1+\frac{\varepsilon b_1}{2A}+O\left(\varepsilon^2\right)\right] = 2\pi+\frac{\varepsilon}{A}\int_0^{2\pi} f\left(A\sin\xi, A\cos\xi\right)\sin\xi \, d\xi + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Poincaré 已证明[1]，这一过程可以拓展到高阶，其中每一 $x^{(j)}\left(\xi\right)$ 都正比于 $\xi$。于是，可以算出极限环的周期，表示为如(1.2)所示的 $\varepsilon$ 的幂级数。

## II.8 组合方法；粘性气体的汇流

在以上各节中，除了 II.5 节之外，我们已经指出，对于用传统的摄动法不能求解的问题，如何用 PLK 方法求得一致有效的解。然而，到此为止所讨论的微分方程的类型还是相当有限的。有些方程不存在 II.5 节那种限制，但用 PLK 仍给不出在整个感兴趣的区域内一致有效的解。在此法失效之处，我们必须求助于其它解法。人们经常发现，采用"边界层方法"，在发生困难的区域引进形如 $\varepsilon^{\mu}u$ 和 $\varepsilon^{\nu}x$ 的新变量，可提供正确的解。而在发生困难的区域之外，PLK 方法仍然有效。因此对于这类问题，要给出完整的解，需要几种方法的组合。我们通过研究粘性导热气体的源汇流来演示这种技巧。我们的讨论沿袭 Wu（吴耀祖）的工作[9]。

图 3 可压缩汇流
（图中字："SONIC" SECTION－"音速"段： STREAMLINE－流线）

这里我们关注的是二维轴对称定常流动（图 3）。唯一的自变量是从原点起算的径向距离 $r$，而径向速度是唯一的速度分量 $u$，对于汇流来说，$u$ 总是负的。令远离原点的速度是亚音速的，且在 $r\to\infty$ 时为零。我们对当地 Mach 数几乎为 1 的流动区域感兴趣，因为那里速度梯度很大，流体的粘性效应已不可忽略。

(2.84) $$\rho u\frac{du}{dr} = -\frac{dp}{dr}+\frac{d}{dr}\left[2\mu\frac{du}{dr}+\frac{2}{3}\left(\mu'-\mu\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(ru\right)\right]+2\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right),$$

令 $p, \rho, T, \mu, \mu', \lambda, R, C_p, C_v$ 分别表示压力、密度、绝对温度、剪切粘性系数、体积粘性系数、导热率、气体常数、定压比热和定容比热。于是，动量方程为

(2.85) $$\rho u r\frac{d}{dr}\left(\frac{u^2}{2}+C_pT\right) = \frac{d}{dr}\left\{r\left[\lambda\frac{dT}{dr}+\mu\frac{du^2}{dr}+\frac{2}{3}\left(\mu'-\mu\right)\left(\frac{1}{2}\frac{du^2}{dr}+\frac{u^2}{r}\right)\right]\right\}.$$

若 $m$ 为汇的强度，则连续性方程很简单，就是

$$2\pi\rho ur=-m. \tag{2.86}$$

假定气体是完全气体，其状态方程为

$$p=R\rho T. \tag{2.87}$$

方便的做法是定义如下的无量纲变量：

$$\begin{aligned}&\bar{r}=r/r_1, \qquad w=-u/a_1, \qquad \theta=T/T_1=\left(a/a_1\right)^2,\\ &\bar{p}=p/p_1, \qquad \bar{\rho}=\rho/\rho_1, \qquad \bar{\mu}=\mu/\mu_1, \quad \bar{\mu}'=\mu'/\mu_1'\end{aligned} \tag{2.88}$$

其中，带下标 1 的量为设定的量，对应于无粘无热传导气体 Mach 数为 1 的状况；比热比 $\gamma$ 始终假设为常数。在 $r=r_1$ 处的音速由下式给定：

$$a_1^{\ 2}=\gamma p_1^{\ 2}/\rho_1, \qquad 2\pi\rho_1 a_1 r_1=m. \tag{2.89}$$

所以连续性方程就变成

$$\bar{\rho}w\bar{r}=1. \tag{2.90}$$

对汇流来说，$w$ 为正。状态方程(2.87)成为

$$\bar{p}=\bar{\rho}\theta. \tag{2.91}$$

我们通过以下两式引入参数 $k$：

$$\mu'-\mu=3k\mu \tag{2.92}$$

和 Reynolds 数

$$\mathrm{Re}=\frac{m}{2\pi\ \mu_1}. \tag{2.93}$$

动量方程(2.84)的无量纲形式成为

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{dw}{d\bar{r}}=-\frac{1}{\gamma}\frac{d\bar{p}}{d\bar{r}}-\frac{2}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{d}{d\bar{r}}\left[\bar{\mu}\frac{dw}{d\bar{r}}+k\bar{\mu}\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\bar{r}w\right)\right]+\bar{\mu}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\frac{w}{\bar{r}}\right)\right\}. \tag{2.94}$$

利用(2.90)，能量方程可以积分一次，积分常数这样选定：在 $\bar{r}=\infty$ 处，无粘无热传导的极限情形为等熵流动。于是有

$$\begin{aligned}\frac{w^2}{2}+\frac{\theta}{\gamma-1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{r}\,\bar{\mu}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\frac{\theta}{\gamma-1}\right)+\left(1+k\right)\frac{dw^2}{d\bar{r}}+2k\frac{w^2}{\bar{r}}\right]&\\ =\frac{\gamma+1}{2\left(\gamma-1\right)},&\end{aligned} \tag{2.95}$$

其中 σ 为 Prandtl 数

$$\sigma=\frac{C_p\mu}{\lambda}. \tag{2.96}$$

现在可利用(2.90)和(2.91)消去压力 $\bar{p}$。采用新自变量 $\eta$

(2.97) $$\eta = \log \bar{r}.$$

可使结果的表述更加方便。于是最后得到两个未知量 $w$ 和 $\theta$ 的方程：

(2.98)
$$\begin{aligned}&\frac{dw}{d\eta}+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\theta}{w}\right)-\frac{\theta}{w}\right]\\&=-\frac{2}{\mathrm{Re}}\left\{\bar{\mu}\left(1+k\right)\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}-w\right)+\left[\left(1+k\right)\frac{dw}{d\eta}+kw\right]\frac{d\bar{\mu}}{d\eta}\right\}\end{aligned}$$

(2.99)
$$\begin{aligned}&\frac{w^2}{2}+\frac{\theta}{\gamma-1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{\mu}\left[\frac{\sigma^{-1}}{\gamma-1}\frac{d\theta}{d\eta}+\left(1+k\right)\frac{dw^2}{d\eta}+2kw^2\right]\\&=\frac{\gamma+1}{2\left(\gamma-1\right)}.\end{aligned}$$

我们想求的解是：在小粘性（或即高 Reynolds 数）下当径向距离很大时趋于无粘亚音速解的解，于是当$\eta\to\infty$时有：$w=0, \theta=(\gamma+1)/2$。方程的临界点在 $\eta$＝0 处，那里，无粘解的当地 Mach 数为 1。

为了避免不必要的复杂计算，我们假设粘性系数与温度无关，因此有

(2.100) $$\bar{\mu}=1.$$

现在可引入我们的问题的小参数 $\varepsilon$：

(2.101) $$\varepsilon=\frac{4\gamma}{\gamma+1}\left(1+k\right)\frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

于是，基本方程组变成

(2.102) $$w^2\frac{dw}{d\eta}+\frac{1}{\gamma}\left[w\frac{d\theta}{d\eta}-\theta\frac{dw}{d\eta}-\theta w\right]=-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\varepsilon\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}-w\right)w^2$$

(2.103)
$$\begin{aligned}&\theta+\frac{\gamma-1}{2}\left(1+b\varepsilon\right)w^2+\frac{\gamma+1}{4\gamma}\varepsilon\left[\frac{1}{\sigma\left(1+k\right)}\frac{d\theta}{d\eta}+\left(\gamma-1\right)\frac{dw^2}{d\eta}\right]\\&=\frac{\gamma+1}{2},\end{aligned}$$

其中 $b$ 为常数：

(2.104) $$b=\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{k}{1+k}.$$

我们发现，用 $w$ 做自变量很方便。于是根据 PLK 方法，取展开式

(2.105)
$$\begin{aligned}w&=\xi+\varepsilon w^{(1)}\left(\xi\right)+\varepsilon^2w^{(2)}\left(\xi\right)+\cdots,\\\eta&=\eta^{(0)}\left(\xi\right)+\varepsilon\eta^{(1)}\left(\xi\right)+\varepsilon^2\eta^{(2)}\left(\xi\right)+\cdots,\\\theta&=\theta^{(0)}\left(\xi\right)+\varepsilon\theta^{(1)}\left(\xi\right)+\varepsilon^2\theta^{(2)}\left(\xi\right)+\cdots.\end{aligned}$$

把(2.105)代入(2.102)和(2.103)，我们得到如下形式的零阶方程：

$$\left[\xi^2+\frac{\xi^2}{\gamma}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\theta^{(0)}}{\xi}\right)-\frac{1}{\gamma}\xi\theta^{(0)}\eta^{(0)}{}'\right]\left(\eta^{(0)}{}'\right)^2=0. \tag{2.106}$$
$$\left[\theta^{(0)}-\left(\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\xi^2\right)\right]\eta^{(0)}{}'=0.$$

其中撇号仍表示关于 $\xi$ 求导。量 $\eta^{(0)}{}'$ 一般不为零，于是由(2.106)得到零阶解

$$\theta^{(0)}=\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\xi^2 \tag{2.107}$$
$$\eta^{(0)}=-\log\xi-\frac{1}{\gamma-1}\log\left|\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\xi^2\right|,$$

这里，积分常数这样选择：当 $\xi=w$ 时，$\theta^{(0)}$ 和 $\eta^{(0)}$ 代表无粘解。

现在一阶方程为

$$\theta^{(1)}+(\gamma-1)\xi w^{(1)}=-\frac{\gamma-1}{2}b\xi^2+\frac{\gamma+1}{2}\alpha\frac{\xi^2\left(1-\beta\xi^2\right)}{1-\xi^2} \tag{2.108}$$

$$\left(\eta^{(0)}{}'\right)^2\left\{\left(2\xi+\frac{\theta^{(0)}}{\gamma}\right)w^{(1)}+\left(\xi^2-\frac{\theta^{(0)}}{\gamma}\right)w^{(1)}{}'+\frac{1}{\gamma}\xi^2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\theta^{(1)}}{\xi}\right)\right. \tag{2.109}$$
$$\left.-\frac{1}{\gamma}\left[\eta^{(0)}{}'\left(\xi\theta^{(1)}+w^{(1)}\theta^{(0)}\right)+\xi\theta^{(0)}\eta^{(1)}{}'\right]\right\}$$
$$=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\xi^2\left[\eta^{(0)}{}''+\xi\left(\eta^{(0)}{}'\right)^3\right],$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 为积分常数，由下式确定：

$$\alpha=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[1-\frac{1}{2\sigma(1+k)}\right],\qquad \beta=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \tag{2.110}$$

(2.108)和(2.109)为求解三个未知量 $\theta^{(1)}$，$w^{(1)}$ 和 $\eta^{(1)}$ 的两个方程，这一自由度可用来控制解的奇性。实际上，将零阶解(2.107)代入(2.109)，我们发现，后一方程化为

$$\frac{d}{d\xi}\left[\eta^{(0)}{}'w^{(1)}-\eta^{(1)}\right]=(1-\alpha)\left[\frac{2\xi}{\left(1-\xi^2\right)^2}+\gamma\frac{\xi}{\left(\xi^2-1\right)}\right] \tag{2.111}$$
$$+\frac{(1-\beta b)(1-\beta)\xi}{\beta\left(\beta\xi^2-1\right)^2}+\left[\frac{1-\beta b}{\beta}-(\beta b-\alpha)\right.$$
$$\left.-\frac{(1+\alpha)2\beta}{1-\beta}\right]\frac{\xi}{\left(\beta\xi^2-1\right)}.$$

PLK 方法的原理是选择 $w^{(1)}$，使得 $w^{(1)}$ 与 $\eta^{(1)}$ 有相同的奇性。这一要求将(2.111)恰当地分解为如下的两个方程：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\left[\eta^{(0)}{}'w^{(1)}\right]&=\frac{(1-\beta b)(1-\beta)}{\beta}\frac{\xi}{\left(\beta\xi^2-1\right)^2}\\&\quad+\left[\frac{(1-\beta b)}{\beta}-(\beta b-\alpha)-\frac{(1+\alpha)2\beta}{1-\beta}\right]\frac{\xi}{\left(\beta\xi^2-1\right)}\end{aligned}\tag{2.112}$$

$$\frac{d\eta^{(1)}}{d\xi}=-(1-\alpha)\left[\frac{2\xi}{\left(1-\xi^2\right)^2}+\frac{\gamma\xi}{\left(\xi^2-1\right)}\right].\tag{2.113}$$

上述方程的解是

$$w^{(1)}(\xi)=-A\frac{\xi}{1-\xi^2}-B\frac{\xi\left(1-\beta\xi^2\right)}{1-\xi^2}\log\left|\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\xi^2\right|\tag{2.114}$$

$$\eta^{(1)}(\xi)=-(1-\alpha)\left[\frac{1}{1-\xi^2}+\frac{\gamma}{2}\log\left|1-\xi^2\right|\right],\tag{2.115}$$

其中，

$$\begin{aligned}A&=\frac{(1-\beta b)(1-\beta)}{2\beta^2}\\B&=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{(1-\beta b)}{\beta}-(\beta b-\alpha)-\frac{(1+\alpha)2\beta}{1-\beta}\right].\end{aligned}\tag{2.116}$$

在(2.114)和(2.115)给出的结果中已令积分常数为零。当然，我们可以保留这两个积分常数，把它们看作解的两个自由参数，由施加某些边界条件来确定。这里，当 $r\to\infty$ 时的自然边界条件都是满足的。然而，比如说，还存在“内”边界 $r=r_0$ 上压力、应力和热流率的条件。这些内边界条件就可用来确定这两个积分常数。令积分常数为零，就把解固定为许多可能的解中的一个特解。

Wu[9]经过进一步计算得到了如下终解：

$$\begin{aligned}w(\xi)&=\xi-\varepsilon\left[A\frac{\xi}{1-\xi^2}+B\frac{\xi\left(1-\beta\xi^2\right)}{1-\xi^2}\times\right.\\&\quad\left.\log\left|\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\xi^2\right|\right]+O\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\xi^2}\right),\end{aligned}\tag{2.117}$$

$$\eta(\xi) = -\left[\log \xi + \frac{1}{\gamma-1}\log\left|\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\xi^2\right|\right]$$

$$(2.118) \qquad -\varepsilon(1-\alpha)\left[\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{\gamma}{2}\log\left|1-\xi^2\right|\right]$$

$$+\varepsilon^2 \frac{2(1-\beta)(1-\alpha)}{\left(1-\xi^2\right)^4} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\left(1-\xi^2\right)^3}, \frac{\varepsilon^3}{\left(1-\xi^2\right)^7}\right),$$

$$\theta(\xi) = \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\xi^2\right) + \varepsilon(\gamma-1)\left[A\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\right.$$

$$(2.119) \qquad +B\frac{\xi^2\left(1-\beta\xi^2\right)}{1-\xi^2}\log\left|\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\xi^2\right|$$

$$\left. -\frac{b}{2}\xi^2 + \frac{1}{2\beta}\alpha\frac{\xi^2\left(1-\beta\xi^2\right)}{1-\xi^2}\right] + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\left(1-\xi^2\right)^2}\right).$$

当$\xi \to 0$时，我们有$w = 0, \eta \to \infty, \theta = (\gamma-1)/2$，因此，(2.118)和(2.119)代表我们的亚音速汇流问题的正确的解。

(2.118)式表明：对于$\xi = 1 - \kappa\varepsilon^{1/3}$（κ为量级为 1 的常数），相继的那组项的量级都是相同的，即为$O(\varepsilon^{2/3})$。如果 ξ 继续趋近于 1，高阶项变得比低阶项更加重要，η 的级数实际上是发散的，所以尽管用了 PLK 方法，超过了$\xi = 1 - \kappa\varepsilon^{1/3}$，我们还是不能得到一致有效解。采用其它方法分解原方程(2.111)也不能改变ξ的允许值的这个自然的极限。事实上，我们可以放弃 PLK 方法，试用经典的摄动法，亦即，令

$$(2.120) \qquad \begin{aligned} \eta &= \eta^{(0)}(w) + \varepsilon\eta^{(1)}(w) + \varepsilon^2\eta^{(2)}(w) + \cdots, \\ \theta &= \theta^{(0)}(w) + \varepsilon\theta^{(1)}(w) + \varepsilon^2\theta^{(2)}(w) + \cdots. \end{aligned}$$

现在，解的受限范围仍出现在 η 的级数中，且实际上与前面的限制相同。反对采用展开式(2.120)的一个理由是：现在$\eta^{(1)}(w)$在$w = \beta^{-1/2}$（对应于亚音速流速）处有虚假的奇性。所以从解的普遍性角度看来，PLK 方法确实更好一些。而且，如果求解推进到更高阶，使用可以一定程度控制奇性的方法，总是安全一些。

为了继续求得超过极限$\xi = 1 - \kappa\varepsilon^{1/3}$的解，我们必须采用“边界层方法”。迄今所得的解给出了必要的连接条件。令$\kappa = 2/(\gamma+1)^{1/3}$，我们发现 η 的级数迅速地收敛，(2.118)中以显式给出的项用于数值计算已足够了。事实上，对于$k = -1/3$（对应于$\mu' = 0, \sigma = 3/4$，且意味着 $\alpha=0$），我们有

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta = 1.766(\gamma+1)^{1/3}\varepsilon^{2/3} \\
&\frac{dw}{d\eta} = -0.478\frac{\varepsilon^{-1/3}}{(\gamma+1)^{2/3}} + 0.17 \\
&\theta = 1 + O\left(\varepsilon^{1/3}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \text{at} \quad w = 1 - 2\left(\frac{\varepsilon}{\gamma+1}\right)^{1/3} + 1.75(\gamma+1)^{1/3}\varepsilon^{2/3}. \tag{2.121}
$$

边界层方法要求对自变量进行修正，用于修正的因子依赖于 $\varepsilon$，同时展开因变量。PLK 方法的结果自然地表明，新自变量 $\zeta$ 应定义为

$$
\eta = \varepsilon^{2/3}\zeta. \tag{2.122}
$$

因此，$w$ 和 $\theta$ 展开成

$$
\begin{aligned}
w &= 1 + \varepsilon^{1/3}\omega^{(1)}(\zeta) + \varepsilon^{2/3}\omega^{(2)}(\zeta) + \varepsilon\omega^{(3)}(\zeta) + \cdots, \\
\theta &= 1 + \varepsilon^{1/3}\vartheta^{(1)}(\zeta) + \varepsilon^{2/3}\vartheta^{(2)}(\zeta) + \varepsilon\vartheta^{(3)}(\zeta) + \cdots.
\end{aligned} \tag{2.123}
$$

令 $\alpha=0$，与(2.121)相一致，将(2.122)和(2.123)代入原方程组(2.102)和(2.103)，得到一阶方程

$$
\frac{d^2\omega^{(1)}}{d\zeta^2} + 2\omega^{(1)}\frac{d\omega^{(1)}}{d\zeta} = (1-\beta) \tag{2.124}
$$

和

$$
\vartheta^{(1)}(\zeta) = -(\gamma-1)\omega^{(1)}(\zeta).
$$

二阶方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\omega^{(2)}}{d\zeta^2} + 2\frac{d}{d\zeta}\left(\omega^{(1)}\omega^{(2)}\right) = \frac{d}{d\zeta}\left(\omega^{(1)}\right)^3 - (1+\beta)\omega^{(1)}, \\
&\qquad\qquad \vartheta^{(2)}(\zeta) = -(\gamma-1)\left[\omega^{(2)}(\zeta) + \frac{1}{2}\omega^{(1)2}(\zeta)\right].
\end{aligned} \tag{2.125}
$$

这些方程的边界条件可由连接条件(2.121)得到。于是在 $\zeta - 1.766(\gamma+1)^{1/3}$ 处有

$$
\begin{aligned}
&\omega^{(1)} = -2/(\gamma+1)^{1/3}, \qquad \frac{d\omega^{(1)}}{d\zeta} = -0.478/(\gamma+1)^{2/3}, \\
&\omega^{(2)} = 1.75(\gamma+1)^{1/3}, \qquad \frac{d\omega^{(2)}}{d\zeta} = 0.17.
\end{aligned} \tag{2.126}
$$

我们现在已经完成边界层问题的表述。Wu 对 $\omega^{(1)}$ 进行了数值计算，我们这里将不叙述相关细节，但本文已进行的讨论可用于显示：在处理物理问题时，若单用 PLK 方法不足以奏效，就要采用 PLK 方法与边界层方法相结合的途径。

# III. 双曲型偏微分方程

## III.1 推广到双曲型方程

在本节中我们会发现，II.1~II.4 里对常微分方程提出的处理步骤可以很容易地推广到二元双曲型偏微分方程。此前，我们关心的是零阶方程的正则奇点（$x=0$）附近的解，采用 PLK 方法的目的在于使得摄动解直到这一奇点还收敛。对于双曲型偏微分方程来说，奇点取代为整条线——奇的特征线，其附近经典的摄动法无法给出有用的解。奇线一定是特征线这一点可以这么来看：我们引进曲线坐标系（$x$，$y$），使得有奇性的线用 $x=0$ 来表示，在这条线上零阶解 $v^{(0)}$ 有代数奇性或对数奇性，与前面讨论过的十分相像，这种情况意味着，当 $x \to 0$ 时，零阶方程中 $\partial^2 v^{(0)} / \partial x^2$ 的系数趋于零，而其它二阶导数的系数保持为有限。换句话说，在 $x=0$ 附近，零阶微分方程有如下形式：

$$(3.1) \qquad x\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial y^2}=\text{含一阶导数的项},$$

其中 $B$ 和 $C$ 在 $x=0$ 处不为零。$dx$ 和 $dy$ 沿着特征线的变化由下式确定：

$$(3.2) \qquad x(dy)^2-B(dx)(dy)+C(dx)^2=0.$$

由(3.2)可知，在 $x=0$ 处 $dx=0$，因此特征线确实为直线 $x=0$。

我们现在还要指出，任何双曲型方程将给出形如(3.1)的零阶方程，因此经典的摄动法在对应于 $x=0$ 的特征线上遭遇困难。我们把零阶方程用特征坐标 $\mu$ 和 $\nu$ 写成正规形式，亦即，

$$(3.3) \qquad \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \mu\, \partial \nu}=\text{ 与二阶导数无关的项。}$$

倘若引进坐标变换

$$(3.4) \qquad x=\mu\nu, \quad y=y(\mu,\nu),$$

则有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \mu\, \partial \nu}&=\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \nu}\right]=\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}\right]\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x\, \partial y}+\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial \mu\, \partial \nu}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x}\\
&\qquad+\frac{\partial^2 y}{\partial \mu\, \partial \nu}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}\\
&=x\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x \partial y}+\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial y^2}+\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial \mu\, \partial \nu}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}.
\end{aligned}$$

因此，把方程(3.3)用自变量 $x$ 和 $y$ 写出，我们就得到形如(3.1)的方程。所以，（应用摄动法之前的）原来的准确的方程一定具有如下形式：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=u,$$

$$\left[x+\varepsilon p_1\left(x,y,v,u,\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\cdots\right]\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.5}$$

$$=\text{terms in } \varepsilon,x,y,u,v,\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

当 $\varepsilon=0$ 时，(3.5)的第二个方程右端关于 $x$，$y$ 的导数是线性的，这一形式与 II.1 中的基本方程(2.1)非常类似，于是促使我们采用相同的方法，为了处理(3.5)，我们引进

$$\begin{aligned}
u&=u^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon u^{(1)}(\xi,\eta)+\cdots,\\
v&=v^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon v^{(1)}(\xi,\eta)+\cdots,\\
x&=\xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^{(2)}x^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots,\\
y&=\eta.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

这里没有把变量 $y$ 展开，原因是摄动解遭遇困难与变量 $x$ 有关而与 $y$ 无关。我们通过分析一个例子来看看 PLK 方法对现在的情况如何发挥作用。

我们考虑如下方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}&=\varepsilon\left(u+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=u
\end{aligned} \tag{3.7}$$

为了利用(3.6)中的展开式，我们先得计算 $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial y$：

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}. \tag{3.8}$$

但是由(3.6)的最后一式立即可得

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial y}=1. \tag{3.9}$$

将对 $x$ 的展开式关于 $y$ 和 $x$ 求导，利用(3.9)，就得到

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial\xi}{\partial y}\left[1+\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots\right]+\left[\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\eta}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\eta}+\cdots\right],\\
1&=\frac{\partial\xi}{\partial x}\left[1+\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots\right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

从(3.10)解得 $\partial\xi/\partial x$ 的 $\partial\xi/\partial y$，将结果代入(3.8)，我们有

(3.11)
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{1+\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots}\frac{\partial}{\partial\xi},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\eta}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\eta}+\cdots}{1+\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots}\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

于是原方程(3.7)就可写成

(3.12)
$$\begin{aligned}&\left[1+\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots\right]\left[\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\eta}+\cdots\right]\\&-\left[\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\eta}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\eta}+\cdots\right]\left[\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\xi}+\varepsilon\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}+\cdots\right]\\&=\left[\varepsilon\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}+\cdots\right]\times\left[u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\cdots+\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\eta}+\cdots\right.\\&\qquad\left.-\frac{\left(\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\eta}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\eta}+\cdots\right)\left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\xi}+\varepsilon\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\xi}+\cdots\right)}{1+\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots}\right].\end{aligned}$$

和

(3.13)
$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\xi}+\varepsilon\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\xi}+\cdots\right]\\&\qquad=\left[1+\varepsilon\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots\right]\left[u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\cdots\right].\end{aligned}$$

于是，零阶方程为

(3.14)
$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\eta}=0,$$
$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\xi}=u^{(0)}.$$

其解为

(3.15) $$u^{(0)}=u^{(0)}(\xi),\qquad v^{(0)}=\int u^{(0)}(\xi)\,d\xi+F(\eta).$$

利用(3.14)，就导得一阶方程

(3.16)
$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\eta}=\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\xi}\left[\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\eta}+u^{(0)}+\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\eta}\right],$$
$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\xi}=\frac{\partial x^{(1)}}{\partial\xi}u^{(0)}+u^{(1)}.$$

现在如果初始条件要求

(3.17) $$u^{(0)} \sim A\xi^{-q_0},$$

式中 $q_0 > 0$，那么(3.16)右端方括号中最坏的项是 $u^{(0)}$。然而，此项可以这样把它消除掉：

对于 $\xi \to 0$，令

(3.18) $$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial \eta} = -A\xi^{-q_0} \qquad \text{or} \qquad x^{(1)} = -A\eta\xi^{-q_0}.$$

做到此点后，对于 $\xi \to 0$，$u^{(0)}$ 的奇性不会比 $O(\xi^{-2q_0})$ 坏，这时，(3.6)的第二个方程表明，

$v^{(0)}$ 的量级也是 $O(\xi^{-2q_0})$。所以，这里的展开式的性态与 II.3 节中讨论的常微分方程情形毫无二致。对于固定的 $\eta$，级数具有与(2.3)相同的特性，于是跟常微分方程一样，PLK 方法足以求得知道 $x$＝0 处的有效的摄动解。这时，$x$＝0 附近的一级近似地为

(3.19) $$u = u^{(0)}(\xi), \qquad x = \xi - \varepsilon A\eta\xi^{-q_0}, \qquad v = \int u^{(0)}(\xi)\, d\xi + F(\eta).$$

因此，如果 $A\eta < 0$，则在 $\partial x / \partial \xi = 0$ 处，或即当

(3.20) $$\xi = \left(-\varepsilon A\eta q_0\right)^{1/(1+q_0)}, \qquad x = \left(1 + \frac{1}{q_0}\right)\left(-\varepsilon A\eta q_0\right)^{1/(1+q_0)}.$$

时存在一条实的分支线。

如果初始条件使得在 $\xi$＝0 处有

(3.21) $$u^{(0)}(\xi) = u^{(0)}(0) + A\xi^{-q_0},$$

式中 $q_0 \le -1$，那么 $\xi$＝0 附近的 $u^{(0)}$ 值表示为 $u^{(0)}(0)$，$v^{(0)}$ 值表示为 $v^{(0)}(0,\eta)$。为了使得 $u^{(1)}$

的奇性与 $u^{(0)}$ 相同，我们必须令

(3.22) $$x^{(1)} = -\eta u^{(0)}(0) - v^{(0)}(0,\eta).$$

但是如果(3.21)中的 $q_0$ 满足 $-1 < q_0 < 0$，为了达到同样的目的，要求

(3.23) $$x^{(1)} = -\eta\left[u^{(0)}(0) + A\xi^{-q_0}\right] - v^{(0)}(0,\eta).$$

上面的例子表明，这里所用的技巧和所得的结果与对 II.1 中的常微分方程情形十分相似。然而有一个本质的区别：常微分方程的奇点固定在 $x$＝0 点，$q_0$ 的值由方程本身显式地给出，而我们的方程(3.7)给不出这种显式的信息。事实上，所谓奇性可出现在任意的 $x$ 处，而 $q_0$ 仅由初始条件确定，否则无从知道。对于 $\xi$ 的不同的值，零阶解可有上面讨论的任一种性质。所以，通过集中于个别的点 $\xi$ 的讨论，尽管有利于理解我们的处理可推广到双曲型

方程这一点，但对全面描述解的性态并非有效。为了深入了解有关情况，我们先来弄清楚：经典摄动级数的非一致有效性源于(3.7)的第一个方程右端的项。事实上，从(3.16)可见，最有害的项是 $\partial u/\partial x$ 或 $\partial^2 v/\partial x^2$，仅仅出现该项是因为方程(3.7)中的自变量是零阶方程的特征变量，而不是准确的原方程的特征变量。如果 $\xi$，$\eta$ 是准确的特征变量，则方程的标准形式为

$$(3.24)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta}=\text{与二阶导数无关的项，}$$

经典的摄动法就管用了。于是现在的问题是用准确的特征线取代零阶方程的特征线。我们会看到，这正是现在的情况下采用 PLK 方法力图完成的事项。

方程组(3.7)可写成单个二阶方程的形式：

$$(3.25)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0.$$

所以 $dx$ 和 $dy$ 沿一条准确的特征线的变化满足如下关系：

$$-(dx)(dy)-\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(dy)^2=0.$$

因此，若用 $\xi$ 和 $\eta$ 表示准确的特征变量，则有

$$d\xi=dx+\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

$$d\eta=dy,$$

或即

$$(3.26)\qquad \begin{aligned}\xi&=x+\varepsilon\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,\\ \eta&=y,\end{aligned}$$

其中积分沿 $\xi$ 为常数的线进行。(3.26)可写成符合于(3.6)的那种形式。例如，到一阶精度，我们有

$$(3.27)\qquad x=\xi-\varepsilon\int\left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\eta}\right)d\eta,\qquad y=\eta$$

这正是前面(3.18)、(3.22)和(3.23)给出的结果。因此，对于本问题来说，用 PLK 方法引进的(3.6)中的自变量 $\xi$ 和 $\eta$ 的只不过是双曲型方程的准确的特征参数，这一事实的数学涵义将在 III.5 节中讨论。

## III.2. 远离点源的行进波

本节讨论将经典的摄动法应用于双曲型偏微分方程遇到的另一种困难，其物理特性与上节所述的相当不同。所研究的问题源自行进波（有时称为简单波）的自然扩展——它行进了远大于其宽度的长距离后如何扩展。这种行进波可用双曲型方程来描述，方程近似地为线性的，但其准确形式是拟线性的，即二阶导数的系数是未知量的低阶导数的函数。所以，若

（$x$，$y$）是线性化近似方程的特征坐标，其完整的方程可写成如下形式：

(3.28) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+F=A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+D,$$

其中，$F$ 关于 $v$、$\partial v/\partial x$ 和 $\partial v/\partial y$ 是线性的，而 $A$、$B$、$C$ 至少关于 $v$、$\partial v/\partial x$ 和 $\partial v/\partial y$ 是线性的，但可能是高阶的，$D$ 至少是二阶的。当波动很弱时，(3.28)右端可以忽略，我们有近似方程

(3.29) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+F=0,$$

这表明，$x$ 和 $y$ 确实是线性化方程的特征变量。对于在 $r$ 方向以常速度 $a_0$ 传播的波，$x$ 和 $y$ 为 $a_0 t-r$ 和 $a_0 t+r$ 。

现在，如果当 $x\to\infty$ 时 $F\to 0$，那么，乍一看来，人们会从(3.29)得到结论：$v$ 将沿着特征线 $y$＝const.不变地传播。但这个结论实际上时错误的，因为沿着 $y$＝const.，到此为止忽略掉的(3.28)右端的有些项可能有不变的符号，沿着 $y$ 积分到很大的 $x$ 之处，可能产生累积效应，这种效应比所考虑的 $F$ 的效应重要得多。因此，这些非线性项尽管当 $x$ 很小时可以忽略，却在 $x$ 很大时对物理现象的正确描述至关重要。Hayes[10]强调过远离波源处波传播的这种累积效应，并以此作为他提出的拟跨音速相似律的基础。

为了更细致地了解这一效应，我们假定：当 $x\to\infty$ 而 $y=O(1)$时所对应的行进波的 $F$ 由下式给定：

(3.30) $$F=\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{n}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]+\frac{\partial v}{\partial x}O\left(\frac{1}{x}\right)+vO\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

其中 $n\ge 0$，对于平面波、柱面波和球面波这三种特殊情形，$n$ 分别等于 0、1/2 和 1。$D$ 的系数为 $O(1/x)$,而 $A$，$B$，$C$ 为 $O(1)$，于是，线性化方程近似地为

$$0=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+\frac{n}{x}\frac{\partial v}{\partial y}=x^{-n}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^n v\right),$$

或

(3.31) $$v\sim\frac{v^{(0)}(y)}{x^n}.$$

这是线性化方程的解的首项。于是 $x^n v^{(0)}(y)$ 将沿着特征线 $y$＝const.不变地传播。为了改进这个解，我们作代换

(3.32) $$v=\frac{v^{(0)}(y)}{x^n}+\frac{v^{(1)}(y)}{x^{n+1}}+\frac{v^{(2)}(y)}{x^{n+2}}+\cdots.$$

把(3.32)代入(3.29)，其中的 F 由(3.30)给定，我们可以确定 $v^{(1)}(y), v^{(2)}(y)$ 等等。换言之，线性化方程会产生从 $v^{(0)}(y)/x^n$ 开始的以 $x$ 降幂次项之和表示的解，但是，(3.29)右端的非

线性项将大大改变这一结论。问题最严重的项是$C\partial^2 v/\partial y^2$，因为 $C$ 中包含 $v$、$\partial v/\partial x$和

$\partial v/\partial y$，$C\partial^2 v/\partial y^2$项可能为$O(1/x^{2n})$。因此，显然，在远距离处非线性项与线性项同等重要，而假如$n<1$，级数解(3.32)是不合适的。从$x$很小到$x$很大时非线性项与线性项的相对重要性的这种变化使得经典的摄动解当$x\to\infty$时失效，又需要应用 PLK 方法了。

## III.3 行进波解

为了便于进行讨论，我们把(3.28)写成如下形式，其中最重要的导数为一阶导数：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+F=A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+D,\\&\frac{\partial v}{\partial y}=u.\end{aligned}\tag{3.33}$$

正如上一小节指出的，其线性化解为

$$u\sim v^{(0)}{}'\left(y\right)x^{-n}=u^{(0)}\left(y\right)x^{-n}.\tag{3.34}$$

现在我们来确定这样的线，沿着此线量$x^n u$保持不变地传播。在这种线上，

$$d\left(x^n u\right)=0=\left(nx^{n-1}u+x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+x^n\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

所以，该线的斜率为

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{nu}{x}\right)\bigg/\frac{\partial u}{\partial y}\tag{3.35}$$

根据线性化方程(3.29)和(3.30)，$dy/dx$为零。但是，实际上$dy/dx$虽很小，但不为零。这意味着$x^n u$沿着$y$＝contant 的直线是变化着的，但沿着稍稍偏离于$y$＝contant 的某条线保持不变。当$x$从很小的值变到很大的值时，也就是说，当波传播到远离源点处时，此线可能远远偏离于$y$＝contant 的直线。然而，因为$x^n u$的常值是被此线携带着的，因此当$x\to\infty$时，非线性项会大大地改变解项。

然而，$x^n u$为常值的线该是什么线？对于双曲型方程来说，这种线一定是特征线。事实上，从另一角度考虑也可发现此点。我们注意到，$x=\infty$处的麻烦是由（3.28）中的$C\partial^2 v/\partial y^2$项招致的。但就是（3.28）中的该项的存在意味着所用的坐标系不是真正的特征坐标系，尽管$x$，$y$确实是线性化方程的特征坐标。如果我们采用真正的特征坐标，就不会有这种困难了。$dx$和$dy$沿真实的特征线的变化由下式给定：

$$-\left(dx\right)\left(dy\right)=A\left(dy\right)^2-B\left(dx\right)\left(dy\right)+C\left(dx\right)^2,\tag{3.36}$$

其中根据定义，$A$、$B$、$C$ 都是小量。于是，两条特征线的斜率由

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2A}\left[-1+B-\sqrt{(1-B)^2-4AC}\right]\cong-\frac{1}{0}$$

和

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2A}\left[-1+B+\sqrt{(1-B)^2-4AC}\right]\cong-0$$

来确定。因此，特别注意到特征线的斜率 $dy/dx$ 很小，在一级近似下，我们可用如下确定的特征坐标：

(3.37) $$\xi=x,\qquad \eta=y+\int C\,d\xi,$$

式中的积分是沿着 $\eta=\mathrm{constant}$ 进行的。于是，应该采用的正确的自变量为上面定义的 $\xi$ 和 $\eta$。事实上，求解的原则如下：如果在线性化问题中，$u$（它是 $v$ 沿特征线法向的导数）可以展开成 $x$ 的降幂的幂级数，其系数沿每条近似的特征线 $y$＝constant 为常数，那么设法寻求类似的展开式，其系数每条准确的特征线 $\eta$＝constant 为常数，再用关于 $x$ 的第二个类似的展开式寻找后一个弯曲的特征线。我们发现，在现在的情形中，要修正的变量是 $y$，而不是 III.1 节中的 $x$。

于是，在一级近似下，由(3.37)可得

(3.38) $$x=\xi,\qquad y=\eta-\int C\,d\xi$$

因为一般来说，$C=O(\xi^{-n})$，这就意味着 $y=\eta+O(\xi^{1-n})$ 或 $\eta+O(\log\xi)$（$n$＝1 时）。当 $\xi\to\infty$ 时，差值 $y$－$\eta$ 是不确定的。对于平面波的情形，$n$＝0，特征线是扇形扩展的直线族；对于柱面波的情形，$n$＝1/2，特征线是抛物线族；对于球面波的情形，$n$＝1，特征线以对数律扩展开来。值得注意的是，当 $x$ 很大时，$v$ 的性态大大地改变了。根据(3.33)的第二个方程，有

(3.39) $$\frac{\partial v}{\partial\eta}=u\frac{\partial y}{\partial\eta}\sim u^{(0)}(\eta)\,\xi^{-n}\left(-\frac{\partial}{\partial\eta}\int C\,d\xi\right)=O\left(\xi^{1-2n}\right),$$

而 $u=O(\xi^{-n})$。之所以这样的原因在于，现在 $\eta$ 为常数的曲线间的距离是 $O(\xi^{1-n})$ 或 $O(\log\xi)\ (n=1)$，因此，就使得 $v$ 在 $x\to\infty$ 时的值大为增加。

作为前面所讲述的方法的一个应用实例，我们来考虑 Whitham[11]处理过的一个球面爆炸波的传播问题。因为该问题主要关注远离爆炸中心处的气体运动，那里运动很微弱，所以可假定成为一种等熵流动，据此进行计算。描述球对称的等熵运动的方程为

(3.40) $$a^2\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial t}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2},$$

其中 $\phi$ 为速度势，$r$ 为径向距离，$t$ 为时间，$a$ 为当地音速，由 Bernoulli 方程给定：

(3.41) $$a^2 = {a_0}^2 - (\gamma - 1)\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\right].$$

这里$a_0$为未扰空气中的音速。由$u = \partial\phi/\partial t,\ v = \partial\phi/\partial r$，运动方程可写为

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

(3.42) $$\frac{\partial v}{\partial r}\left[{a_0}^2 - (\gamma-1)u + \frac{1}{2}(\gamma+1)v^2\right] - \frac{\partial u}{\partial t} - 2v\frac{\partial v}{\partial t}$$
$$+\frac{2v}{r}\left[{a_0}^2 - (\gamma-1)u - \frac{1}{2}(\gamma-1)v^2\right] = 0.$$

在线性化理论中，本问题的外行波解为$\phi = f_0(a_0t - r)/r$；因此，$u$和$v$具有如下形式：

(3.43) $$u = \frac{f_1(a_0t - r)}{r},$$
$$v = -\frac{u}{a_0} + \frac{f_2(a_0t - r)}{r^2},$$

也就是说，$u$和$v$依$r$的负次幂展开，其系数沿每条近似特征线$a_0t - r = \text{constant}$为常数。于是，我们来寻找类似形式的$u$和$v$的展开式，其系数沿每条**准确的**特征线$\eta = \text{constant}$为常数，而$\eta$是$r$和$t$的函数，在求解过程中确定。由此，假定$u$和$v$有如下形式：

(3.44) $$u = {a_0}^2\left[f(\eta)r^{-1} + g(\eta)r^{-2} + \cdots\right],$$
$$v = -\frac{u}{a_0} + a_0\left[b(\eta)r^{-2} + c(\eta)r^{-3} + \cdots\right].$$

将它们代入表明$\eta = \text{constant}$为特征线的条件中，得到如下的类似展开式：

(3.45) $$a_0t = r - \eta\log r - h(\eta) - m(\eta)r^{-1}.$$

事实上，这个展开式的头两项正是我们的一般理论所预期的。然而，我们发现，对(3.45)给出了修正后，要求对(3.44)进行相应的修正，使得运动方程得以满足。这种修正包括(3.44)中的$g$，$b$，$c$，$m$分别被$g_1(\eta)\log r + g_2(\eta)$，$b_1(\eta)\log r + b_2(\eta)$，$c_1(\eta)\log r + c_2(\eta)$，$m_1(\eta)\log r + m_2(\eta)$所取代，这样一来，方程(3.42)就满足了。

唯一的附加条件是：$\eta = \text{constant}$为方程组(3.42)的特征线，亦即，$(dt/dr)$必须满足条件

(3.46) $$\left(\frac{dt}{dr}\right)_\eta^2\left[{a_0}^2 - (\gamma-1)u - \frac{\gamma+1}{2}v^2\right] + 2v\left(\frac{dt}{dr}\right)_\eta - 1 = 0$$

将经修正的$u$，$v$，$t$的级数代入上式，令$r$和$\log r$的同次幂相等，我们发现，$g_1(\eta)$恒为零，

所有 $\eta$ 的未知函数可用 $h(\eta)$ 和若干常数表示。所得的解为

(3.47) $$u = a_0{}^2\left[-\frac{k\eta}{r} + \frac{\kappa_1\eta^2 + \frac{1}{2}B_1}{r^2} + \cdots\right],$$

(3.48) $$v = -\frac{u}{a_0} - a_0\left[\frac{\left(\frac{1}{2}k\eta^2 + B_1\right)\log r + \frac{1}{2}k\eta^2 + k\int_0^\eta \xi h'(\xi)\,d\xi + B_2}{r^2}\right] + \cdots,$$

$$a_0 t = r - \eta\log r - h(\eta)$$

(3.49) $$-\frac{\left(\frac{1}{2}k\eta^2 + B_1\right)\log r + \kappa_2\eta^2 + \frac{1}{4}(\gamma+5)B_1 + \int_0^\eta \xi h'(\xi)\,d\xi + B_2}{r} + \cdots,$$

其中 $B_1, B_2$ 为至今未确定的任意常数，而

(3.50) $$k = \frac{2}{(\gamma+1)},\quad \kappa_1 = k^2 - \frac{k}{4},\quad \kappa_2 = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k.$$

为了确定 $B_1, B_2$，我们必须利用前激波 $S$ 上的条件。还存在一个后激波 $S_1$。在（$r$，$t$）平面中，两个激波的位形如图 4 所示。由于与 $S$ 和 $S_1$ 之间区域内的小波的相互作用，在激波行进过程中，$S$ 受到阻滞，$S_1$ 得到加速；当 $r\to\infty$ 时，两激波的强度退化到零，最终以音速 $a_0$ 传播。

在激波上有两个边界条件要满足，它们的最便捷的形式是：(i)“角度性质”，它表明在激波强度的一级近似下，在 $(r, a_0 t)$ 平面上，激波与其两侧的特征线的夹角相等；(ii) 越过激波时 $\phi$ 是连续的，因此 $\partial\phi/\partial r + (\partial\phi/\partial t)/U = v + u/U$ 在激波两侧的值相同，这里 $U$ 是激波速度。

令 $C_0$ 为激波 $S$ 之前的未扰区域内的一条特征线，$C$ 为两激波之间区域内的一条特征线，因此 $C$ 由(3.49)式给出：

(3.51) $$a_0 t = r - \eta\log r - h(\eta) + O\left(r^{-1}\log r\right),\qquad \eta = \text{const on } C.$$

因为特征线必须在两个激波 $S$ 和 $S_1$ 之间，对任意给定的 $r$ 来说，$t$ 的值是有界的，所以 $\eta$ 和 $h(\eta)$在此区域内也是有界的。令 $S$ 的方程为

(3.52) $$a_0 t = r - f(r)\ \text{ on } S;$$

于是，根据角度性质（i），而且已知$C_0$由下式确定：

$$a_0 t = r + \text{const},$$

我们得到

(3.53) $$f'(r) = \frac{1}{2}\eta r^{-1} + O\left(r^{-2}\log r\right).$$

从(3.51)和(3.52)中消去$a_0 t - r$，我们得知，在激波上有

(3.54) $$f(r) = \eta \log r + h(\eta) + O\left(r^{-1}\log r\right).$$

这样一来，我们就可以用$\eta$作为参数来描述激波，亦即，在激波上$r$和$t$都是$\eta$的函数，所以，对(3.54)关于$\eta$求导，将(3.53)给出的$f'(r)$代入，就得到

$$\left[\eta r^{-1} + O\left(r^{-2}\log r\right)\right]\frac{dr}{d\eta} + 2\ \log r = -2h'(\eta),$$

或即

$$d\left[\eta^2 \log r + O\left(\eta r^{-1}\log r\right)\right] = -2\eta h'(\eta)\, d\eta.$$

求积分，得到

(3.55) $$\begin{aligned}&\eta^2\log r + O\left(\eta r^{-1}\log r\right)\\ &\qquad = -2\int \eta h'(\eta)\, d\eta = -2\eta h(\eta) + 2h_1(\eta) + b^2,\end{aligned}$$

其中，

(356) $$h_1(\eta) = \int_0^\eta h(\xi)\, d\xi$$

$b$是一个任意常数。可以求得(3.55)式的$\log r$形式的解：

(3.57) $$\log r = \frac{b^2}{\eta^2} - \frac{2h(\eta)}{\eta} + \frac{2h_1(\eta)}{\eta^2} + O\left(r^{-1}\log^{3/2} r\right).$$

于是由(3.54)得到

(3.58) $$f = \frac{b^2}{\eta} - h(\eta) + \frac{2h_1(\eta)}{\eta} + O\left(r^{-1}\log r\right).$$

对给定的$\eta$，由(3.57)给出$r$，(3.58)给出$f$，然后由(3.52)给出$a_0 t$。所以，(3.52)、(3.57) 和(3.58)构成的方程组是确定激波 $S$ 的参数方程组。当 $h(\eta)$未知时，因为它是有界的，可以展开成$h(0) + \eta h'(0) + O(\eta^2)$，于是我们可以用(3.57)来确定$\eta$作为$\log r$的函数，而激波的方程式变成

(3.59) $$a_0 t = r - b\log^{1/2} r - h(0) - \frac{1}{2}bh'(0)\log^{-1/2} r + O\left(\log^{-1} r\right).$$

这里的误差是相当大的；如果我们已知$h(\eta)$，肯定宁愿采用激波的参数表示式。在本问题的

框架下，常数 $b$ 无法确定，因为除非给定了 $r$ 和 $t$ 很小时的波动的具体形式，激波位置没法绝对地确定。

激波速度 $U$ 是激波曲线 $S$ 的斜率，因此有

$$\frac{1}{U}=\frac{dt}{dr}=\frac{1-f'(r)}{a_0}.$$

这样一来，把激波条件（ii）用于 $S$，由于 $S$ 之前 $\phi$ 恒为零，就可得到在紧靠 $S$ 之后，有

$$a_0 v+u-uf'(r)=0$$

因此，由(3.47)、(3.48)和(3.53)得到

(3.60) $\qquad B_1=0, \qquad B_2=-\frac{1}{2}kb^2$。

至此，我们求得了问题的解，从给定的数据，可确定解的具体形式。我们的例子还表明，在实际计算中，并不真正需要利用线性化方程的特征参数作为自变量，对这个具体问题来说，用半径 $r$ 做自变量更加方便，因此就用 $r$ 来替代特征参数 $a_0t-r$ 了。

## III.4 满足初始条件的一致有效解

在前面两小节讨论的问题中，尽管处理的是在离源点远处的小扰动，但如果 $n>0$，在源点处仍可有大扰动，因为这时初始扰动在传播过程中将最终以 $x^{-n}$ 的规律衰减。但是在 III.3 节中的球面爆炸波问题中可清楚地看到，由于初始扰动没有清晰地给定，所得到的解还有一定程度的任意性。如果给定了初始条件，且初始扰动很弱，则用已得的结果可以确定构建一致有效解的统一方案。于是，$u$ 和 $v$ 一定为 $\varepsilon$ 的量级，$\varepsilon$ 是用来估计扰动大小的小参数。因此

(3.61)
$$\begin{aligned} u&=\varepsilon u^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 u^{(1)}(\xi,\eta)+\cdots, \\ v&=\varepsilon v^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 v^{(1)}(\xi,\eta)+\cdots. \end{aligned}$$

坐标 $\xi$ 和 $\eta$ 是对线性化方程中的特征坐标 $x$ 和 $y$ 的修正。可是为了考虑精确的微分方程中的非线性项大 $x$ 处的反常效应，我们必须给出 $\eta$ 与 $y$ 的区别。事实上，按前面的讨论，$\xi$ 和 $\eta$ 跟 $x$ 和 $y$ 的关系由(3.37)或(3.38)给出。

为了构造一致有效一阶近似解，我们取定线性化方程的一阶解 $u^{(0)}(x,y)$，用 $\xi$ 和 $\eta$ 取代 $x$ 和 $y$，而 $\xi$ 和 $\eta$ 由下式给定：

(3.62) $\qquad x=\xi, \qquad y=\eta-\varepsilon\int C^*(\xi,\eta)\,d\xi+O(\varepsilon^2).$

这里，$C^*$是非线性方程(3.33)中的系数 $C$ 在 $\xi\to\infty$ 时的渐近形式，亦即 $u$ 替换成 $u^{(0)}(\xi,\eta)$ 时的形式。我们可以用 $u^{(0)}(\xi,\eta)$ 取代 $C$ 中的 $u$，是因为我们这里只对 $y$ 的一阶修正感兴趣，我们可以用系数 $C$ 的渐近形式，是因为 $\xi$ 很小时，$y$ 与 $\eta$ 的区别完全不重要。在这种区别是重要的地方，$\xi$ 必须足够大，使得渐近形式是准确的，这一特殊步骤实际上是由 Whitham 与 Lighthill 合作提出的，Lighthill 后来将此步骤推广应用于上节描述的理论中，Whitham 将此

法应用于超音速弹体的绕流问题[12,13]以及恒星中球面弱激波的传播问题[14]中。我们这里对这些很有兴趣实例不予讨论，尽管基本原理已在前几小节中勾画出来，但其细节描述仍十分冗长，在此难以细说。

作为替代，我们下面给出一个多少有点经过人为简化的方程的完整解，用来说明这个方法的技巧，该方程也由 Lighthill[2]研究过，其形式为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{n}{x+y}u=u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\&\frac{\partial v}{\partial y}=u,\end{aligned}\tag{3.63}$$

定解条件为

$$u=v=0 \quad \text{on} \quad y=0\tag{3.64}$$

和

$$u=\varepsilon U(y)y^{-n}, \quad \text{on} \quad x=0, \quad U(0)=0;\tag{3.65}$$

其中 $\varepsilon$ 是小参数，而 $0<n<1$。其线性化解为

$$u=\varepsilon U(y)(x+y)^{-n}$$

由此，按上述思路，一致有效一阶解为

$$u=\varepsilon U(\eta)(\xi+\eta)^{-n}, \quad x=\xi, \quad y=\eta-\varepsilon U(\eta)\xi^{1-n}/(1-n).\tag{3.66}$$

为了构造准确到 $\varepsilon^2$ 阶的一致有效解，我们首先做变换

$$x=\xi, \quad y=y(\xi,\eta).\tag{3.67}$$

于是(3.63)变成

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial y}{\partial \eta}}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{n\,u}{\xi+y}=u\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial y}{\partial \eta}}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}u\right)+\frac{\frac{\partial u}{\partial \eta}}{\frac{\partial y}{\partial \eta}}\right],\\&\frac{\partial v}{\partial \eta}=u\frac{\partial y}{\partial \eta}.\end{aligned}\tag{3.68}$$

然而我们希望 $\eta$ 成为准确的特征坐标，使得(3.68)的第一式中 $\partial u/\partial \eta$ 的系数为零，于是，$y$ 的方程就是

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=-u\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+1\right].\tag{3.69}$$

这时(3.68)就简化成

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{n\,u}{\xi+y}=u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}u-2\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right),$$

(3.70)

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}=u\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

现在，将(3.61)和

(3.71) $$x=\xi,\qquad y=\eta+\varepsilon y^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 y^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots$$

代入(3.69)和(3.70)，$\varepsilon$ 阶解为

$$u^{(0)}(\xi,\eta)=\frac{U(\eta)}{(\xi+\eta)^n},\qquad y^{(1)}(\xi,\eta)=-\frac{U(\eta)(\xi+\eta)^{1-n}}{1-n},$$

(3.72)

$$v^{(0)}(\xi,\eta)=\int_0^\eta \frac{U(t)}{(\xi+t)^n}\,dt.$$

二阶方程为

(3.73) $$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}+\frac{n\,u^{(1)}}{\xi+\eta}=\frac{n\,y^{(1)}u^{(0)}}{(\xi+\eta)^2}+u^{(0)}\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \xi^2},\qquad \frac{\partial y^{(2)}}{\partial \xi}=-u^{(1)}.$$

把一阶解(3.72)代入(3.73)，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\xi+\eta)^n u^{(1)}\right]=-\frac{nU^2(\eta)}{(1-n)(\xi+\eta)^{1+n}}+U(\eta)\int_0^\eta \frac{n(n+1)U(t)}{(\xi+t)^{n+2}}dt.$$

现在我们来改写初始条件(3.65)，它可写成

$$u=\varepsilon U(y)y^{-n}=\varepsilon u^{(0)}(0,y)\qquad \text{at}\qquad x=0,$$

或者，将上式中的变量 $y$ 取代为 $\eta$，引用展开式(3.61)，上式又可写成

$$\varepsilon u^{(0)}\left(0,\ \eta+\varepsilon y^{(1)}+\cdots\right)+\varepsilon^2 u^{(1)}(0,\eta)+\cdots=\varepsilon u^{(0)}(0,\eta)+\cdots.$$

所以，令上式中的 $\varepsilon^2$ 的项相等，就得到 $u^{(1)}$ 的如下形式的初始条件：

$$u^{(1)}(o,\eta)=-\left[\frac{du^{(0)}(0,\eta)}{d\eta}\right]y^{(1)}(0,\eta)=\left[\frac{d}{d\eta}\left(U(\eta)\eta^{-2}\right)\right]\frac{U(\eta)\eta^{1-n}}{1-n}.$$

利用这一条件，可以求解 $u^{(1)}$ 的微分方程，给出

$$u^{(1)}=\frac{U^2(\eta)}{1-n}\left[\frac{1}{(\xi+\eta)^{2n}}-\frac{1}{\eta^n(\xi+\eta)^n}\right]$$

(3.74)

$$+\frac{U(\eta)\eta^{1-n}}{(1-n)(\xi+\eta)^n}\frac{d}{d\eta}\left(U(\eta)\eta^{-n}\right)$$

$$+\frac{nU(\eta)}{(\xi+\eta)^n}\int_0^\eta\left\{\frac{1}{t^{n+1}}-\frac{1}{(\xi+t)^{n+1}}\right\}U(t)\,dt.$$

当 $x$ 或 $\xi$ 很大时，由(3.74)得

$$u^{(1)}(\xi,\eta)\sim F(\eta)\xi^{-n}, \tag{3.75}$$

其中，

$$F(\eta)=-\frac{U^2(\eta)}{(1-n)\eta^n}+\frac{U(\eta)\eta^{1-n}}{(1-n)}\frac{d}{d\eta}\left(U(\eta)\eta^{-2}\right)+nU(\eta)\int_0^\eta\frac{U(t)\,dt}{t^{n+1}}. \tag{3.76}$$

当 $x$ 或 $\xi$ 很大时，还可给出 $u$ 和 $y^{(2)}$：

$$u\cong\frac{\varepsilon U(\eta)+\varepsilon^2F(\eta)+\cdots}{x^n}, \tag{3.77}$$

$$y^{(2)}\cong-\frac{F(\eta)\xi^{1-n}}{1-n}. \tag{3.78}$$

为了使解到 $\varepsilon^2$ 阶一致有效，只需要计及(3.78)给出的 $y^{(2)}$ 的渐近形式。于是有

$$\begin{aligned}&u=\varepsilon u^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2u^{(1)}(\xi,\eta)+\cdots,\\&x=\xi,\\&y=\eta+\varepsilon y^{(1)}(\xi,\eta)-\frac{\varepsilon^2F(\eta)\xi^{1-n}}{1-n}.\end{aligned} \tag{3.79}$$

(3.77)式清晰地表明，对任意的 $\xi$ 和 $\eta$，关于 $y$ 的级数是收敛的；(3.79)的第三式也表明，虽然当 $\xi$ 很大时，关于 $y$，$\varepsilon y^{(1)}$ 的初始修正可能相当大，但 $y$ 的相继项的比值总是为 $\varepsilon$ 的量级，然而 $y$ 中的 $\varepsilon^2y^{(2)}$ 对于得到准确到 $\varepsilon^2$ 阶的解非常重要。为了明白此点，我们来计算此项导致的在固定的 $x$ 和 $y$ 下 $\eta$ 的改变，它显然是

$$\frac{\varepsilon^2y^{(2)}}{\dfrac{\partial y}{\partial\eta}}=\frac{\varepsilon^2y^{(2)}}{1+O\left(\varepsilon\xi^{1-n}\right)}.$$

当 $x$ 和 $y$ 很大时， $y^{(2)}$ 为 $O(\xi^{1-n})$。因此，由于有 $\varepsilon^2y^{(2)}$ 引起的 $\eta$ 的改变可能是 $\varepsilon$ 的量级，而这一改变带来的对 $u$ 的修正为 $O(\varepsilon^2)$。因此，当 $x$ 很大时，在 $y$ 中保留 $\varepsilon^2y^{(2)}$ 是很重要的。

## III.5 利用精确特征线的摄动

正如前几小节所述，将 PLK 方法应用于双曲型偏微分方程时，对于克服经典的摄动法的困难十分有效，尽管如此，这种应用在数学上还不是很完善。问题在于：摄动级数真的收敛吗？还是它们只是看起来收敛？为了回答这个数学问题，我们必须重新审视这一方法，使之更加合乎规范，遵循数学规律。在 III.1 节中我们已经看到，此方法的关键步骤是把坐标变成准确的特征坐标；而在 III.3 节和 III.4 中，我们引进了一个准确的特征坐标 $\eta$，而保留 $x$

坐标不变，然而这是由于在行进波或简单波问题中，没有必要改变 $x$。为了使得方法规范化，包含所有要处理的情形，我们就需要利用两个准确的特征变量 $\xi$ 和 $\eta$，接着，方法的要旨是首先把双曲型偏微分方程转换成以特征变量 $\xi$ 和 $\eta$ 表示的正规形式，然后问题的解展开成 $\varepsilon$ 的幂级数：

$$
\begin{aligned}
u &= \varepsilon u^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 u^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^3 u^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots,\\
v &= \varepsilon v^{(0)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 v^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^3 v^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots,\\
x &= \xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 x^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots,\\
y &= \eta+\varepsilon y^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 y^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots.
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

这里 $x$ 和 $y$ 是线性化方程的特征坐标；接下去就是以准确的特征变量 $\xi$ 和 $\eta$ 作为自变量的经典摄动过程。不少作者提出了这样的看法，并认为级数的收敛性似乎隐含在双曲型偏微分方程的一般理论中。但是，只有 Lin[15]和 Fox[16]对于简单的情形证明了展开式(3.80)关于 $\xi$ 和 $\eta$ 的所有值和充分小的 $\varepsilon$ 的收敛性。Lin[15]还用上述过程研究了几个很有意义的平面超音速流动问题，我们这里不予详述，感兴趣的读者可以查阅原始论文。

Lin 和 Fox 的工作的重要性在于，通过演证本章前几小节所述的过程在数学上的完善性，对 PLK 方法提供了支持。对于解决工程问题来说，PLK 方法比基于准确的特征线的摄动法更招人喜欢。第一个理由是：PLK 方法具有手段的经济性这一优点。例如，在行进波问题中，只用一个特征变量 $\eta$，而 $x$ 保持不变，因为这样做足矣；对于 III.1 节中的问题，招致麻烦的是 $\partial^2 v/\partial x^2$ 项，只需要用只用一个特征变量 $\xi$，而 $y$ 可以保持不变。如果采用特征摄动法，$x$ 和 $y$ 都必须修正，计算工作量就要大得多了。当只需要求得到 $\varepsilon$ 阶的最低阶解时，情况尤其如此，而在工程应用中通常就只需要最低阶解。此外，PLK 方法更具有灵活性和普遍性，其原理可应用于多于两个自变量的和高于二阶的双曲型偏微分方程。我们要做的就是引进坐标的充分的变形，以克服利用线性化方程时出现的难点。

# IV. 椭圆型偏微分方程

## IV.1 PLK 方法应用于薄翼问题时的失效

椭圆型偏微分方程的奇性与双曲型偏微分方程的奇性不同，它们有奇点。一个熟知的例子是：用一阶边界条件——经典薄翼理论寻求不可压缩理想流体绕薄翼流动的解时，在翼型的头部就有这类奇点。事实上，取 $\varepsilon$ 为翼型的厚度-弦长比，如果我们把求解推进到 $\varepsilon^3$ 阶，解在头部的奇性比一阶解和二阶解还要坏。尝试应用 PLK 方法来解决此问题看来很自然。Lighthill[17]本人就研究过这一问题，对钝头翼型得到了很有用的解。

我们来考虑一个较为简单的问题——对称翼型无攻角绕流，远离翼型的流速无量纲化为 1。流函数 $\psi$ 必须满足 Laplace 方程：

$$
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \tag{4.1}
$$

边界条件可设为在翼型表面 $\psi=0$。设翼型的形状可表示为

$$
y^* = \pm\varepsilon\sqrt{x}\left(F_0+F_1x+\cdots\right). \tag{4.2}
$$

其中 $F_0$、$F_1$ 为常数，$y^*$为翼型表面的 $y$，后继的项使得翼型后缘 $x=c$ 出现尖点。现在我们按照 PLK 方法引进如下展开式：

$$\begin{aligned}&\psi=\eta+\varepsilon\psi^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2\psi^{(2)}(\xi,\eta)+\varepsilon^3\psi^{(3)}(\xi,\eta)+\cdots,\\&x=\xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2x^{(2)}(\xi,\eta)+\varepsilon^3x^{(3)}(\xi,\eta)+\cdots,\\&y=\eta.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Lighthill 发现

$$x^{(1)}=0\tag{4.4}$$

而且为了使得$\psi^{(3)}$在头部 $x=0$ 的奇性不比$\psi^{(1)}$和$\psi^{(2)}$坏，须令

$$x^{(2)}=\frac{1}{4}F_0{}^2,\tag{4.5}$$

这是一个常数。可以证明，$\varepsilon^2x^{(2)}$项等于翼型头部曲率半径之半。因此，到$\varepsilon^2$项，用 PLK 方法得到的解等于对应的经典摄动解，其中 $x$ 坐标向下游偏移了半个头部半径的距离。这样一来，摄动解头部奇性被“吸进”翼型，翼型界面外部实际上就没有奇性了。所得的解与精确解的比较表明，它是正确的，幸运的是：可把 PLK 方法应用于这一简单情形。

然而，如果求解推进到更高阶，困难就出现了。Fox[16]指出：所有“更高阶”项在头部均为$O(\varepsilon^2)$，因此，超过了二阶，就无法对解再做改进了，这一方面，此结果很像 II.1 节中讨论过的可压缩汇流，在那里我们也发现高阶解不能用来减小解的误差。所以，我们受到启发，猜测这里与汇流一样，翼型头部奇性只能用边界层解来处理，也就是说，我们不得不放弃求得适用于整个流场分单一的解，而是设法寻求局部地适用于头部附近的解，于是要求得完整的解，就得通过联合头部解与用经典的摄动法或 PLK 方法得到的解来实现。事实上，Van Dyke[18]已发展了这种理论，虽然还没有在数学上完善地确立，但通过物理学推理和与精确解比较，此理论看来是正确的。Van Dyke 的研究工作实际上更加一般，涵盖了可压缩亚音速流动。

## IV.2 出现困难的可能原因

PLK 方法应用于薄翼问题时可能失效，事先是否存在蛛丝马迹？似乎有这样的预警：当我们把展开式(4.3)代入翼型方程(4.2)时，在展开其它因式的同时，必须在 $x$=0 附近把$\sqrt{x}$按$\xi$和$x^{(n)}(\xi,\eta)$展开，因为$\sqrt{x}$在 $x$=0 处不是正则的，显然，这种展开不可能是一致有效的。在 II.5 节中谈及常微分方程时我们谈到过同样的困难。倘若我们像 Fox 那样，进行形式展开，那么 PLK 方法就拒绝产生一致有效解。本文作者曾经尝试过先把(4.2)取平方，以避免对$\sqrt{x}$进行展开，但这时边界条件就要求成为对很小的$\xi$和$\eta$的一个关于$\psi^{(n)}$的幂级数，而$\psi^{(n)}$在$\xi=\eta=0$ 处非正则，因此这种做法也不可能导得一致有效展开式。所以，PLK 方法对这个问题失效是在预料之中的。

根据以上推理明显可知，即使对 $y$ 引入另一个展开式：

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon x^{(1)}(\xi,\eta) + \varepsilon^2 x^{(2)}(\xi,\eta) + \cdots, \\ y &= \eta + \varepsilon y^{(1)}(\xi,\eta) + \varepsilon^2 y^{(2)}(\xi,\eta) + \cdots. \end{aligned}$$

PLK 方法用于翼型问题时仍然失效。Fox 的确尝试过这种探索，并发现这样做无济于事。因此，我们对困难根源的猜测得到了进一步证实，我们甚至可以斗胆说一句：椭圆型偏微分方程的解若有与这里所述的同类奇性，用 PLK 方法不可能去除这种奇性，也就是说，求得对**所有各阶**均一致有效的解时是不可能的。当然，就像薄翼理论中那样，求得到 $\varepsilon$ 的有限阶的一致有效的解还是有可能的，工程师也许满足于这种具有有限的大小且为一致的误差的解。

## V. 在流体边界层问题种的应用

### V.1. 平板边界层

小粘性流体流动沿固体表面的边界层理论是由 Prandtl 创立的，这是应用力学和数学中所有边界层问题的原型。Prandtl 的边界层理论实际上给出了很小粘性问题的一阶解。近年来，很多研究者尝试过改进原有理论，使之可求得高阶解，但是困难在于 Prandtl 解在物体头部由奇性，高阶摄动只是使得这种奇性变得更坏，实际上使整个物面所受的总剪切力为无穷大，而非有限值，因此，这种解是完全不可接受的。

图 5. 沿平板的不可压缩流体边界层

Kuo[3]认识到，要求得令人满意的解，应在边界层理论的框架下引进坐标变形，也就是说，对物理坐标应做**两次**变换：首先，引进边界层变换，这也要求最自变量做出修正，然后再对边界层坐标进行变形。我们可以这么说：II.8 节中讨论的组合方法是边界层方法“加上”坐标变形法，而 Kuo 提出的则是边界层方法“乘以”坐标变形法，这是他对 Poincare 和 Lighthill 的想法的很有创意的拓广，确实对消除 Prandtl 理论的非一致有效性颇有高效，由于这一工作的重要性和所得结果的优美性，我们在下一小节中将十分详尽地描述一个特殊问题，也是 Kuo 研究过的一组问题中最为简单的一个：不可压缩流体的平板边界层。

令 $\bar{x}, \bar{y}$ 为直角坐标，平板占据 $0 \le \bar{x} \le L,\ \bar{y} = 0$ 这一条形区（见图 5），$L$ 为平板的长度。在这一坐标系中，速度的 $\bar{x}, \bar{y}$ 分量分别为 $\bar{u}, \bar{v}$，压力为 $\bar{p}$，在本问题中密度 $\bar{\rho}$ 和运动粘性系数 $\bar{\nu}$ 均为常数。本问题的微分方程为 Navier-Stokes 方程和连续性方程，我们后面写出这些方程，用的是无量纲边界层变量，而非上面定义的物理变量。这些边界层变量借助于 Reynolds 数 $Re$

$$(5.1)\qquad Re = U_\infty L / \bar{\nu}$$

来定义。上式中 $U_\infty$ 为远离平板处的流体速度。对于很小粘性的流体，$Re$ 很大，我们引进本问题的小参数 $\varepsilon$，由下式确定：

$$(5.2)\qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{\bar{\nu}}{U_\infty L}.$$

于是，按 Prandtl 的做法，边界层变量为

(5.3)
$$u=\bar{u}/U_\infty,\qquad v=\frac{1}{\varepsilon}\left(\bar{v}/U_\infty\right)=\frac{1}{\varepsilon}V,$$
$$x=\bar{x}/L,\qquad y=\frac{1}{\varepsilon}\left(\bar{y}/L\right)=\frac{1}{\varepsilon}Y;$$

于是 $v$ 和 $y$ 被小参数 $\varepsilon$ 修正了。我们还引进无量纲压力 $p$：

(5.4) $$p=\left(\bar{p}-\bar{p}_\infty\right)/\bar{\rho}\,U_\infty{}^2.$$

为了满足连续性方程，我们引进如下确定的流函数 $\psi$：

(5.5) $$u=\psi_y,\qquad v=-\psi_x,$$

这里及下文中，我们以下标表示偏导数。用所引进的变量表示的 Navier-Stokes 方程为

(5.6)
$$\psi_y\psi_{xy}-\psi_x\psi_{yy}-\psi_{yyy}=-p_x+\varepsilon^2\psi_{xxy}$$
$$p_y+\varepsilon^2\left(\psi_x\psi_{xy}-\psi_y\psi_{xx}+\psi_{xyy}\right)=-\varepsilon^4\psi_{xxx}$$

这是关于两个未知量 $\psi$ 和 $p$ 的两个方程。

为了用“边界层方法”求解这一问题，令

(5.7)
$$\psi(x,y)=\psi^{(0)}(x,y)+\varepsilon\psi^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2\psi^{(2)}(x,y)+\cdots,$$
$$p(x,y)=\qquad\qquad\varepsilon p^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2p^{(2)}(x,y)+\cdots,$$

其中零阶压力为零，因为我们处理的是平板问题。自变量 $x$ 和 $y$ 是未经变形的边界层变量，我们发现，要确定 $\varepsilon^2$ 项，坐标系（$x$，$y$）必须变形，但我们到有必要时再来做这件事情。

现在，把(5.7)代入(5.6)，令与 $\varepsilon$ 无关的部分相等，就得到零阶流函数 $\psi^{(0)}$ 应满足的方程

(5.8) $$\psi_y{}^{(0)}\psi_{xy}{}^{(0)}-\psi_x{}^{(0)}\psi_{yy}{}^{(0)}-\psi_{yyy}{}^{(0)}=0.$$

一阶方程通过令与 $\varepsilon$ 的系数相等得到：

(5.9)
$$\psi_y{}^{(0)}\psi_{xy}{}^{(1)}+\psi_{xy}{}^{(0)}\psi_y{}^{(1)}-\psi_x{}^{(0)}\psi_{yy}{}^{(1)}-\psi_{yy}{}^{(0)}\psi_x{}^{(1)}=-p_x{}^{(1)}+\psi_{yyy}{}^{(1)}$$
$$0=-p_y{}^{(1)}$$

(5.9)的第二个方程表明：在 Prandtl 边界层理论中的熟知的结论——在边界层的任一截面上压力保持为常数仍然成立。事实上，如果我们限于求得准确到 $\varepsilon$ 的解，那么用较简单的 Prandtl 的边界层方程，而不用完整的 Navier-Stokes 方程(5.6)，就可以恰当描述有关现象。

零阶方程(5.8)就是有名的 Blasius 方程，采用如下替换：

(5.10) $$\psi^{(0)}=\sqrt{x}\,f_0(\zeta),$$

(5.11) $$\zeta=\frac{y}{\sqrt{x}},$$

并用撇号表示关于 $\zeta$ 的导数，由(5.8)得到

(5.12) $$2f_0'''+f_0f_0''=0.$$

于是可求得速度分量

$$(5.13)\qquad u^{(0)}=\psi_y{}^{(0)}=f_0'(\zeta),\quad v^{(0)}=-\psi_x{}^{(0)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\zeta f_0'(\zeta)-f_0(\zeta)\right].$$

因为边界条件为在 $y=0$ 处 $u=v=0$，在 $y=\infty$ 处 $u=1$，所以 $f_0$ 的边界条件可用(5.13)求得，它们是

$$(5.14)\qquad \begin{aligned} &f_0=f_0'=0 &&\text{当}\quad \zeta=0,\\ &f_0'=1 &&\text{当}\quad \zeta=\infty. \end{aligned}$$

在这些边界条件下，(5.12)的解由下列幂级数和大 $\zeta$ 处的渐近级数给出：

$$(5.15)\qquad \begin{aligned} f_0(\zeta)=\frac{\sigma}{2!}\zeta^2+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sigma^2}{5!}\zeta^5+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\frac{11\sigma^3}{8!}\zeta^8 \\ +\left(-\frac{1}{2}\right)^3\frac{375\sigma^4}{11!}\zeta^{11}+\cdots, \\ \sigma\cong 0.332, \end{aligned}$$

$$(5.16)\qquad f_0(\zeta)\simeq\zeta-1.73+0.231\int_\infty^\zeta d\zeta'\int_\infty^{\zeta'}e^{-(1/4)(\zeta''-1.73)^2}d\zeta''.$$

根据(5.16)，并利用(5.13)，我们可以计算在边界层外缘（$\zeta\to\infty$）上的速度 $V_e$

$$(5.17)\qquad V_e=v_0\varepsilon\frac{1}{\sqrt{x}},$$

其中，

$$(5.18)\qquad v_0\cong\frac{1.73}{2}=0.865.$$

为了用(5.9)确定一阶流函数 $\psi^{(1)}$，需要确定 $p^{(1)}$，为此，我们必须计算边界层外的、由边界层诱导的速度场 $u$ 和 $V$，边界层的效应可近似地用(5.17)给出的 $V_e$（$0\le x\le 1$）来表示。当 $x<0$ 时，$V_e$ 为零；在尾流（$1<x$）中，我们近似地取 $V_e=0$。当然，在尾流的边界上 $V_e$ 不可能真正为零，但这种差别也许不重要。综上所述，我们有

$$(5.19)\qquad V_e=\begin{cases} 0 & x<0,\\ \varepsilon\dfrac{v_0}{\sqrt{x}} & 0\le x\le 1,\\ 0 & 1<x. \end{cases}$$

现在，把边界层外的势流场展开成 $\varepsilon$ 的幂级数，亦即，

$$u = 1 + \varepsilon\, U^{(1)}\left(\frac{\overline{x}}{L}, \frac{\overline{y}}{L}\right) + \cdots,$$

(5.20)

$$V = \varepsilon\, V^{(1)}\left(\frac{\overline{x}}{L}, \frac{\overline{y}}{L}\right) + \cdots.$$

因为边界层的外缘很靠近平板，也就是说，边界层的厚度具有 $\varepsilon$ 的数量级，可以采用与寻求薄翼理论的一阶解相同的方法来求得$U^{(1)}$和$V^{(1)}$，因此，我们有

(5.21) $$U^{(1)} - iV^{(1)} = \frac{v_0}{\pi}\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{w}\left(z-w\right)} = -\frac{iv_0}{\sqrt{z}} + \frac{v_0}{\pi\sqrt{z}}\ \log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}},$$

其中 $z$ 表示$(x+iY)$。在这一阶近似下，边界层外缘的诱导速度$U_e^{(1)}$为$U^{(1)}(x,0)$，因此，

(5.22)

$$U_e^{(1)} = U^{(1)}\left(x,0\right) = \frac{v_0}{\pi\sqrt{x}}\ \log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2v_0}{\pi}\left[1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + \cdots + \frac{x^n}{\left(2n+1\right)} + \cdots\right].$$

于是，采用 Bernoulli 方程，边界层外缘的压力 $p^{(1)}$ 为

(5.23) $$p^{(1)}\left(x\right) = -U_e^{(1)}\left(x\right).$$

所以一阶方程(5.9)变成

(5.24)

$$\psi_y^{(0)}\psi_{xy}^{(1)} + \psi_{xy}^{(0)}\psi_y^{(1)} - \psi_x^{(0)}\psi_{yy}^{(1)} - \psi_{yy}^{(0)}\psi_x^{(1)} - \psi_{yyy}^{(1)} = \frac{dU_e^{(1)}}{dx}$$

$$= \frac{2v_0}{\pi}\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{5}x + \cdots + \frac{\left(n-1\right)}{\left(2n-1\right)}x^{n-2} + \cdots\right].$$

为了求解(5.24)，我们把$\psi^{(1)}$作如下展开：

(5.25) $$\psi^{(1)} = \frac{2v_0}{\pi}\left[x^{1/2}f_1\left(\zeta\right) + \frac{1}{3}x^{3/2}f_2\left(\zeta\right) + \cdots + \frac{x^{n-(1/2)}}{\left(2n-1\right)}f_n\left(\zeta\right) + \cdots\right],$$

其中的各个 $f$ 均仅为 $\zeta$ 的函数，而 $\zeta$ 由(5.17)定义。将(5.10)和(5.25)代入(5.24)，令 $x$ 的同次幂的系数为零，就得到 $f_n$ 的方程

(5.26) $$2f_n''' + f_0 f_n'' - 2\left(n-1\right)f_0' f_n' + 2\left(n-1\right)f_0'' f_n = -2\left(n-1\right),\ n = 1,2,3,...$$

现在由$\psi^{(1)}$得到诱导速度的 $x$ 分量：

(5.27) $$u^{(1)} = \psi_y^{(1)} = \frac{2v_0}{\pi}\left[f_1' + \frac{x}{3}f_2' + \cdots + \frac{x^n}{\left(2n+1\right)}f_{n+1}' + \cdots\right].$$

在边界层的外缘（$\zeta \to \infty$），$u^{(1)}$须与$U_e^{(1)}$一致；在平板表面（$\zeta$=0）上，$u^{(1)} = v^{(1)} = 0$，

因此，三阶方程(5.26)的边界条件为

$$
(5.28)\qquad \begin{array}{lll} f_n = f_n' = 0 & \text{当} & \zeta = 0, \\ f_n' = 1 & \text{当} & \zeta = \infty. \end{array}
$$

因为方程(5.26)的系数不能在 $\zeta$ 的整个区域用简单的函数解析地展开，一般不可能求得对所有 $\zeta$ 和 $n$ 都成立的解析解，总的来说，这是一个数值求解的问题。Kuo 把 Howarth 和 Tani 求得的小 $n$ 情形的数值解与大 $n$ 情形的渐近解结合起来，得到了关于表面摩擦系数 $C_f$（即平板一侧表面所受的总剪切力除以 $\overline{\rho} U_\infty^2 L/2$）的如下重要公式：

$$
(5.29)\qquad C_f = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}} + \frac{4.12}{\mathrm{Re}}.
$$

这里 $Re$ 是(5. 1)所定义的 Reynolds 数。这一公式与 Janour[19]的实验数据进行过比较，发现 $Re$ 低到 10 时，两者还很相符；Reynolds 数低于 10 时，用 Oseen 方法求解更为合适。

## V.2 二阶解

倘若我们遵循上述步骤，写出 $\psi^{(2)}$ 的微分方程，就会发现，与 $\psi^{(1)}$ 不同，$\psi^{(2)}$ 的前缘奇性比 $\psi^{(0)}$ 和 $\psi^{(1)}$ 的奇性坏，而且附加的剪切应力事实上不能积分出来。为了矫正这种状况，Kuo 把展开式(5.7)中的各种函数看成 $\xi$ 和 $\eta$ 的函数，对边界层变量做进一步变形。显然，这种变形只需要到 $\varepsilon^2$ 阶，因为问题出在 $\psi^{(2)}$ 上。

$$
(5.30)\qquad x = \xi + \varepsilon^2 x^{(2)}\left(\xi, \eta\right) + \cdots, \qquad y = \eta.
$$

这里的 $y$ 保持不变，下面会看到这样做没问题。于是，关于 $x$ 和 $y$ 的偏导数变成

$$
(5.31)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\cong \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2 x_\xi^{(2)} \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &\cong \frac{\partial}{\partial \eta} - \varepsilon^2 x_\eta^{(2)} \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}\right\}
$$

显然，新变量产生的效应是二阶的，零阶解和一阶解保持不变，只有 $x$，$y$ 被 $\xi$，$\eta$ 所取代了。$\psi^{(2)}$ 和 $p^{(2)}$ 的方程为

$$
(5.32)\qquad \begin{aligned} &\psi_\eta^{(0)}\psi_{\xi\eta}^{(2)} + \psi_{\xi\eta}^{(0)}\psi_\eta^{(2)} - \psi_\xi^{(0)}\psi_{\eta\eta}^{(2)} - \psi_{\eta\eta}^{(0)}\psi_\xi^{(2)} - \psi_{\eta\eta\eta}^{(2)} \\ &= \left[\psi_\xi^{(1)}\psi_{\eta\eta}^{(1)} - \psi_\eta^{(1)}\psi_{\xi\eta}^{(1)}\right] + \Big[-p_\xi^{(2)} + \psi_{\xi\xi\eta}^{(0)} + \psi_{\eta\eta\eta}^{(0)} x_\xi^{(2)} + \left(p_\eta^{(2)} - 2\psi_{\xi\eta\eta}^{(0)}\right) x_\eta^{(2)} \\ &\qquad + \psi_\eta^{(0)}\psi_\xi^{(0)} x_{\xi\eta}^{(2)} - \left(\psi_\xi^{(0)2} + 3\psi_{\xi\eta}^{(0)}\right) x_{\eta\eta}^{(2)} - \psi_\xi^{(0)} x_{\eta\eta\eta}^{(2)}\Big] \end{aligned}
$$

和

$$
(5.33)\qquad p_\eta^{(2)} + \psi_\xi^{(0)}\psi_{\xi\eta}^{(0)} - \psi_\eta^{(0)}\psi_{\xi\xi}^{(0)} + \psi_{\eta\eta\eta}^{(0)} = 0
$$

与以前一样，我们引进相似变量$\zeta$

(5.34) $$\zeta=\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}.$$

于是就可发现，(5.32)右端的第一组各项当$\xi\to 0$时的奇性为$O(\xi^{-1})$，而第二组项中由于存在像$\psi_{\xi\xi\eta}^{(0)}$这样的项，当$\xi\to 0$时的奇性为$O(\xi^{-2})$，第二组项是产生麻烦的项，因此，应该这样取$x^{(2)}$，它能使(5.32)右端第二个方括号里的项变得无害。为此，我们注意到，按照(5.33)，有

(5.35) $$p^{(2)}=p_2\left(\xi\right)+P^{(2)}\left(\xi,\eta\right),$$

其中

(5.36) $$p^{(2)}\left(\xi,\eta\right)=\int_0\left(\psi_{\eta}^{(0)}\psi_{\xi\xi}^{(0)}-\psi_{\xi}^{(0)}\psi_{\xi\eta}^{(0)}-\psi_{\xi\eta\eta}^{(0)}\right)d\eta.$$

于是，$p^{(2)}$应该像$p^{(1)}$一样，由二阶势流确定。但是，鉴于$\psi^{(1)}$的特性，在边界层外缘$V_e^{(2)}$与$V_e^{(1)}$有同样的奇性。根据运用一阶理论的经验，我们知道，梯度$dp_2/d\xi$无甚大碍，另一方面，$P_{\xi}^{(2)}$有强奇性，因此，$x^{(2)}$的正确选取必须顾及$P_{\xi}^{(2)}$，不必去理睬$dp_2/d\xi$。由此，$x^{(2)}$的方程为

(5.37) $$\begin{aligned}&\psi_{\eta\eta\eta}^{(0)}\ x_{\xi}^{(2)}+\left(P_{\eta}^{(2)}-2\psi_{\xi\eta\eta}^{(0)}\right)x_{\eta}^{(2)}+\psi_{\eta}^{(0)}\psi_{\xi}^{(0)}x_{\xi\eta}^{(2)}\\&\qquad-\left(\psi_{\xi}^{(0)2}+3\psi_{\xi\eta}^{(0)}\right)x_{\eta\eta}^{(2)}-\psi_{\xi}^{(0)}x_{\eta\eta\eta}^{(2)}=P_{\xi}^{(2)}-\psi_{\xi\xi\eta}^{(0)}.\end{aligned}$$

这个方程对于确定坐标变形极其重要，而且比前几章中提及的变形函数复杂得多了。

现在由方程(5.10)和(5.11)已得到$\psi^{(0)}=\sqrt{\xi}f_0(\zeta)$，通过研究方程(5.37)的结构发现，$x^{(2)}$仅为$\zeta$的函数，亦即

(5.38) $$x^{(2)}=g_2\left(\zeta\right).$$

现在，(5.37)可写成

$$\begin{aligned}&2\left(f_0-\zeta f_0'\right)g_2'''+\left(f_0^2-\zeta f_0f_0'-6\zeta f_0''\right)g_2''\\&\qquad+\left[2f_0'\left(f_0-\zeta f_0'\right)-6\left(f_0''+\frac{1}{3}\zeta f_0'''\right)\right]g_2'\\&\qquad\qquad=6\zeta f_0''+\zeta^2f_0'''+\frac{1}{2}\zeta f_0f_0'-f_0^2+\frac{1}{2}\zeta^2f_0'^2.\end{aligned}$$

此方程有积分因子$f_0(\zeta)$，两端乘以$f_0(\zeta)$，积分之，得到

(5.39) $$2f_0(f_0-\zeta f_0')g_2''-\left[2f_0'(f_0-\zeta f_0')+4\zeta f_0f_0''-f_0^3+\zeta f_0^2f_0'\right]g_2' \\ =G(\zeta)+\text{const},$$

其中

(5.40) $$G(\zeta)=\int_0^\zeta f_0\left[6\zeta f_0''+\zeta^2 f_0'''+\frac{1}{2}\zeta f_0f_0'-f_0^2+\frac{1}{2}\zeta f_0'^2\right]d\zeta \\ =\frac{3\sigma^2}{4}\zeta^4-\frac{3\sigma^3}{140}\zeta^7+\frac{999\sigma^4}{20\times(8!)}\zeta^{10}-\cdots.$$

$G(\zeta)$ 的这一级数形式是通过利用(5.15)得到的。在 $\zeta=0$ 附近，(5.39)有近似形式：

(5.41) $$\frac{d}{d\zeta}(\zeta^2 g_2')=-\frac{3}{2}\zeta^2+\frac{\text{const}}{\zeta^2},$$

或即

(5.42) $$g_2=-\frac{1}{4}\zeta^2+\frac{\text{const}}{\zeta^2}+\frac{\text{const}}{\zeta}+\text{const}.$$

因此，如果加上如下条件：

(5.43) $$x^{(2)}=g_2=0 \qquad \text{当} \quad \eta=\zeta=0,$$

使得平板不因坐标变形而“移动”，那么 $g_2(\zeta)$ 中的三个积分常数均应取为零。于是，仅仅由(5.43)中的条件就完全确定了 $g_2(\zeta)$。更为完善的计算给出

(5.44) $$g_2(\zeta)=-\left[\frac{1}{2\times 2!}\zeta^2-\frac{\sigma}{14\times 5!}\zeta^5+\frac{7\sigma^2}{30\times 8!}\zeta^8-\cdots\right].$$

另一方面，当 $\zeta$ 很大时，根据(5.16)，$f_0(\zeta)$ 可近似地取为 $\zeta-1.73$。于是(5.39)化为

(5.45) $$g_2'''+\frac{1}{2}(\zeta-1.73)g_2''+g_2'=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\zeta-1.73\right).$$

通过做替换

(5.46) $$g_2'=-\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1.73}{2}\right)+g'(t), \qquad t=\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta-1.73),$$

我们得到

$$g'''+tg''+2g'=0.$$

此方程可以积分两次，结果为

(5.47) $$g'+tg=C_1t+C_2.$$

这个方程也很容易积分，最后我们得到当 $\zeta$ 很大时 $g_2(\zeta)$ 的如下渐近公式：

$$g_2(\zeta) \sim -\frac{1}{4}\left(\zeta - \frac{1.73}{2}\right)^2 + C_1 + C_2 e^{-(1/4)(\zeta-1.73)^2} + C_3 e^{-(1/4)(\zeta-1.73)^2} \int_{\zeta_1}^{(1/\sqrt{2})(\zeta-1.73)} e^{t^2/4} dt. \tag{5.48}$$

把(5.44)和(5.48)给出的两种解在$\zeta_1 = 3$处连接起来，确定$C_1, C_2, C_3$的值分别为 1.901，1.264，0.431。而且我们注意到

$$e^{-t^2}\int_{t_1}^{t} e^{t^2} dt$$

当$\zeta \to \infty$时趋于零，所以，当$\zeta$很大时，$g_2(\zeta)$以$-(\zeta - 1.732/2)^2/4$的方式趋于负无穷大。详细计算表明，$g_2(\zeta)$是$\zeta$的单调光滑函数，起步于抛物线$-\zeta^2/4$，中止于抛物线$-(\zeta - 1.732/2)^2/4$。

我们已经用 PLK 方法的原理完全确定了变形函数。然而，这里我们应该注意到：这里的零阶和一阶近似是边界层方程的解，边界层方程是抛物型偏微分方程；而变形函数和二阶近似是用 Navier-Stokes 方程计算出来的，Navier-Stokes 方程是椭圆型偏微分方程。因此，从低阶近似到高阶近似，方程类型改变了。于是，我们预期，用变形坐标求得的一致有效解会再现精确的 Navier-Stokes 方程的特性，尽管我们只用到了$\psi^{(0)}$，我们在下一小节可以看到这一点。事实上，就工程应用而言，没有必要进一步计算$\psi^{(2)}$本身。

## V.3 坐标变形带来的零阶解的改进

我们记得，Blasius 解给出的流场局限于第一象限，平板位于正$\xi$轴，变量$\xi$和$\eta$都是正的。不进行坐标变形，Blasius 解在平板头部附近给出的流场非常不能令人满意。根据$\zeta$的定义(5.34)，若$\xi \neq 0$，则$\zeta$＝0 对应于$\eta$＝0，由此，当$g_2(0) = 0$时$x$＝$\xi$，亦即，正$x$轴变换到正$\xi$轴；另一方面，若＝0，但$\eta > 0$，则$\zeta \to \infty$，$g_2 \to -\infty$，于是$x \to \infty$；但是，当$\xi$和$\eta$同时为零时，使得$\zeta$是任意的，整个负$x$轴被方程$x = \varepsilon^2 g_2(\zeta)$扫过，因此，$\xi$-$\eta$平面的坐标原点映射到负$x$轴；对于非负的$\xi$值，容易证明，每条直线$\xi$＝const 映射到$x$-$y$平面上的一条曲线，它从$x$轴上的一点出发，随着$\eta$无限增加，趋于负无穷大。因此，第一象限的 Blasius 域映射到整个上半$x$-$y$平面。

$\zeta$为常值的曲线令人感兴趣。在$\xi$-$\eta$平面上，这些曲线是以原点为顶点的抛物线，但由(5.30)、(5.34)和(5.38)可见，在$x$-$y$平面上，$\zeta$＝constant 的曲线族由下式确定：

$$y^2 = \zeta^2\left[x - \varepsilon^2 g_2(\zeta)\right]. \tag{5.49}$$

因此它们还是抛物线型，但现在顶点是分散的，位于$x = \varepsilon^2 g_2(\zeta)$，随着$\zeta$增大，它们沿负

$x$ 轴移动到 $-\infty$，比方说，若我们取 $\zeta$＝5.2,为粘性区域的边界曲线，就会发现，粘性效应扩散到平板前缘前方的量级为 $\varepsilon^2$ 的距离处，或者说，物理距离为 $\overline{\nu}/U_\infty$ 量级的距离处。所以，仅仅是我们的坐标变形就已能比经典的 Blasius 解提供合理得多的图案了。

利用 (3.11)式，注意到 $x^{(1)}=0$，就得到速度分量

(5.50)

$$u=\frac{\overline{u}}{U}=\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial y}=\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\eta}-\frac{\varepsilon^2\dfrac{\partial x^{(2)}}{\partial\eta}}{1+\varepsilon^2\dfrac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}}\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\xi}$$

$$=f_0'(\zeta)+\frac{\varepsilon^2 g_2'(\zeta)}{2\xi-\varepsilon^2\zeta g_2'(\zeta)}(\zeta f_0'-f_0),$$

$$V=\frac{\overline{v}}{U}=-\varepsilon\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial x}=-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\dfrac{\partial x^{(2)}}{\partial\xi}}\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\xi}$$

$$=\frac{\varepsilon\sqrt{\xi}}{2\xi-\varepsilon^2\zeta g_2'(\zeta)}(\zeta f_0'-f_0).$$

因为这些表达式中分母 $2\xi-\varepsilon^2\zeta g_2'(\zeta)$ 仅在前缘处为零，解的唯一的奇性出现在前缘。现在 $V$ 是处处有限的，且在负 $x$ 轴上为零，因为那里 $\xi$ 为零，而 $\zeta\neq 0$ 。对 $u$ 的影响体现在额外的一项，它在边界层中实际上是二阶量。Blasius 解中 $u$ 在负 $x$ 轴上和 $y$ 轴上为 1，与之相比，这里的解有实质性的改进：现在按照(5.50)，在 $\xi$＝0 处 $u$ 随 $\zeta$ 变化。

为了给出前缘处奇性的准确性质，对于小 $\zeta$，可用首项显式地近似表示 $g_2$，即按(5.44)，为 $-\zeta^2/4$，用这一形式的 $g_2$，由(5.30)得

$$x=\xi-\frac{\varepsilon^2}{4}\frac{y^2}{\xi}=\xi-\frac{1}{4\xi}Y^2.$$

因此有

(5.51)
$$\left.\begin{aligned}2\xi&=x+\sqrt{x^2+Y^2},\\ \frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta^2&=\sqrt{x^2+Y^2}-x.\end{aligned}\right\}$$

于是，如果用前缘项 $\sqrt{\xi}(\sigma\zeta^2/2)$ 近似表示 $\psi^{(0)}$，则在前缘附近有

(5.52)

$$\psi^{(0)}\cong\frac{\sigma}{\varepsilon^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x+\sqrt{x^2+Y^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{x^2+Y^2}-x\right\}$$

$$=\frac{\sigma}{\varepsilon^2}\frac{1}{\sqrt{2}}Y\left\{\sqrt{x^2+Y^2}-x\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

若记 $x+iY=z, x-iY=\bar{z}$，则上式给出的 $\psi^{(0)}$ 正比于 $z^{3/2}-\bar{z}^{1/2}z$ 的实部，因此，经过坐标变形，在前缘附近 $\psi^{(0)}$ 是一个双调和函数，展示了 Stokes 近似的特性。还可以进一步注意到，速度分量 $u$ 和 $V$ 在边界层里有不同的数量级，现在却是同一量级的了。这是经改进的 Blasius 解的又一特征。

当 $\zeta$ 很大时，$g_2(\zeta)$ 也可以做近似，按(5.48)取作 $-\zeta^2/2$，此时(5.50)化为

$$
\left.\begin{aligned}
u &= 1-\frac{\varepsilon v_0}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{r-x}}{r}, \qquad r^2=x^2+Y^2\\
v &= \frac{\varepsilon v_0}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{r+x}}{r},
\end{aligned}\right\}\zeta\to\infty. \tag{5.53}
$$

在边界层外缘，$Y=O(\varepsilon)$，因此可令 $Y=0$ 来得到边界层外缘处的速度分量，于是它们等于 1 和 $\varepsilon v_0/\sqrt{x}$，与 Blasius 解一致。但是(5.53)中的扰动项实际上是 $-i\varepsilon 2v_0 z^{-1/2}$ 的实部和虚部（这里 $z=x+iY$）。因此，扰动速度确实是势流的速度，在远离平板处为零，采用坐标变形后，经典边界层理论中的不现实的图案完全得到了矫正。

人们可以预期，由于进行了坐标变形，平板上的剪切应力会发生变化。然而，详细计算表明，在 $\zeta=0$ 处，所有的剪切应力的变化为零，因此，用边界层理论计算的摩阻力仍是正确的，前面的结果(5.29)依然成立。对摩阻力计算的进一步改进只能来自对 $\psi^{(2)}, x^{(3)}$ 的计算，但从前面已经得到的出色结果看来，此举难得再有利可图了。

## V.4 超音速流中的边界层

Kuo 把边界层变换与坐标变形结合起来，成功地应用于不可压缩边界层的 Blasius 问题，这一成功指引他用同样的方法研究更为困难的超音速边界层流动。这里的复杂性主要来源于粘性边界层与恰在边界层外的头部激波所界定的无粘超音速流动的强烈相互作用。由于存在粘性力，边界层中的气体速度下降且受到加热，于是沿着平板，边界层“厚度”持续地增大，这又折返过来，对影响外部流动，沿平板产生压力梯度，超音速流与上节讨论的不可压缩流的主要区别在于：对于超音速流来说，这种“诱导”的压力梯度要比不可压缩流强得多。但 Mach 数很大时，情况尤其如此。事实上，Kuo 发现，边界层坐标的变形在关于 $\varepsilon$ 的一阶近似中就已经必须引进了，亦即

$$
x=\xi+\varepsilon x^{(1)}(\xi,\eta)+\varepsilon^2 x^{(2)}(\xi,\eta)+\cdots, \qquad y=\eta. \tag{5.54}
$$

与不可压缩流的对应问题 [如(5. 30)所示] 相比，求解的困难在更早的阶段就发生了。

Kuo 研究了两个此类问题：一个是沿平板的超音速边界层[4]，另一个是平板与远处来流有一夹角的超音速边界层（超音速绕楔流动的边界层）。然而，这两个问题所涉及的计算量很大，复杂得在这里难以尽述，感兴趣的读者可参看 Kuo 的原著。我们希望，通过前几节详细讨论讨论较为简单的不可压缩边界层问题，对于 PLK 方法的技巧及新近应用的威力已经做了充分的阐释。

# VI. 结束语

在前面各节中，我们已做了略显冗长的阐述，描绘用 Poincaré、Lighthill 和 Kuo 所提出的方法来解决含小参数 $\varepsilon$ 的物理问题的原理和技巧，我们采用了若干例子（有些还相当复杂）来阐释该方法，但没有给出它的一般的数学理论。我们真的感到有压力，因为迄今没有一般理论可资利用，然而，希望读者并非完全要自行决定 PLK 方法能否帮助他们得到特定问题得到有用的解。在整个讨论中，我们也已指出，对有些问题 PLK 方法无效；对这种例子，我们总是试图指出为什么此方法失效（参看 II.5、II.8、IV.2 节）。

我们给出的各种问题中 PLK 方法失效的理由一定是有点含糊和启发性的，这是一个值得我们的数学界同事们关注的问题。能否说服他们来研究这个课题，告诉我们哪些问题用 PLK 方法是有效的，哪些问题则会失效？对 PLK 方法失效的问题，亦即，它不能给出到所有的阶都一致有效的解（或者有一致的任意精度的解），但仍能给出到 $\varepsilon$ 的有限阶一致有效的解，就像薄翼问题那样。能否一看问题的表述就知道此点了呢？

上面这些问题尚无答案之时，工程师大可不必沮丧，对他来说，估价所做的计算的正确性的最佳导引仍是他对物理问题的了解。如果数学解没有给出他预期的结果，他当然必须质疑数学解的有效性。所以，他没有完全“了解”PLK 方法不应妨碍他尝试用此法去解决自己的问题。他不妨记住 Heaviside 在他的运算微积法受质疑时说过的一段话：“我难道要因为不完全了解消化过程而拒绝进餐吗？”

## 参考文献


1. Poincaré, H., Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste, Vol.1, Chap.III, Paris, 1892.
2. Lighthill, M. J., A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, *Phil. Mag*. [7] **40**, 1179 (1949).
3. Kuo, Y. H., On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds number, *J. Math. and Phys.* **32**, 83 (1953).
4. Kuo, Y. H., Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds, *J. Aeron. Sci.* **23**, 125 (1956).
5. Wasow, W. A., On the convergence of an approximation method of Lighthill, Abstract No.40, *Bull. Am. Math. Soc.* **61**, 48 (1955); *J. Rational Mech. Anal.* **4**, 751 (1955).
6. Carrier, G. F., Boundary layer problems in applied mechanics, Advances in Appl. Mech. 3, 1 (1953).
7. Carrier, G. F., Boundary layer problems in applied mechanics, *Comm. Pure and Appl. Math*. **7**, 11 (1954)
8. Lighthill, M. J., The position of the shock-wave in certain aerodynamic problems, *Quart. J. Mech. And Appl. Math*. **1**, 309 (1948).
9. Wu, Y. T., Two dimensional sink flow of a viscous, heat-conducting compressible fluid; cylindrical shock waves, *Quart. Appl. Math.*
10. Hayes, W. D., Pseudotransonic similitude and first-order wave structure, *J. Aeron. Sci.* **21**, 721 (1954).
11. Whitham, G. B., The propagation of spherical blast, *Proc. Roy. Soc.* **A203**, 571 (1950).
12. Whitham, G. B., The behavior of supersonic past a body of revolution, far from the axis, *Proc. Roy. Soc*. **A201**, 80 (1950).

13. Whitham, G. B., The flow pattern of a supersonic projectile, *Comm. Pure and Appl. Math.* **5**, 301 (1952).
14. Whitham, G. B., The propagation of weak spherical shocks in stars, *Comm. Pure and Appl. Math.* **6**, 397 (1953).
15. Lin, C.C., On a perturbation theory based on the method of characteristics, *J. Math. and Phys*. **33**, 117 (1954).
16. Fox, P. A., On the use of coordinate perturbation in the solution of physical problems, Tech. Rept. No.1, Project for Machine Method of Computation and Numerical Analysis, Mass. Inst. Technol., Cambridge, Mass., 1953.
17. Lighthill, M. J., A new approach to thin airfoil theory, *Aeronaut. Quart.,* **3**, 193 (1951).
18. van Dyke, M. D., Subsonic edges in thin-wing and slender-body theory, *Natl. Advisory Comm. Aeronaut., Tech. Note* No. 3343 (1954).
19. Janour, Z., Resistance of a plate in parallel flow at low Reynolds number, *Natl. Advisory Comm. Aeronaut., Tech. Mem*. No.1316 (1951).

（戴世强译，陈允明校）