库仑势问题中的动力学对称性

张福林

南开大学 陈省身数学研究所 理论物理室

主要内容

库仑势：$V \propto \frac{-1}{r}$, $F \propto \frac{-1}{r^2}$.

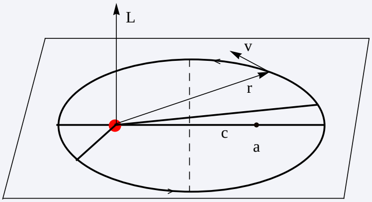
1. 行星开普勒运动中的守恒量
2. （非相对论）量子力学氢原子的动力学对称性
   - 量子力学中的对称性，守恒量，简并
   - 氢原子的SO(4)对称性
3. （Dirac）相对论量子力学中库仑势的动力学对称性
   - 相对论氢原子不具有SO(4)动力学对称性
   - 具有SO(4)动力学对称性的Dirac方程
4. 相关及致谢
   - 相关的研究工作
   - 致谢

本节内容

主要思路

找到守恒量，从而得到运动轨道。

角动量守恒⇒平面运动



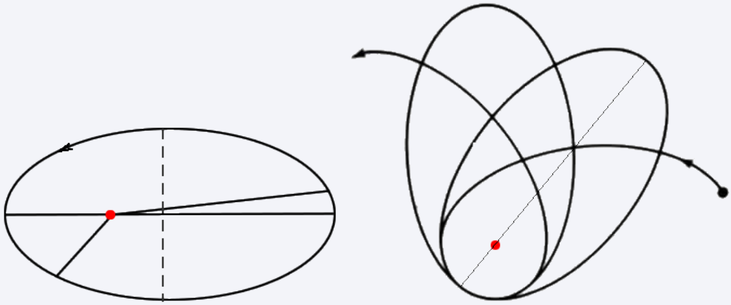
运动方程

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{n}_r. \tag{1}$$

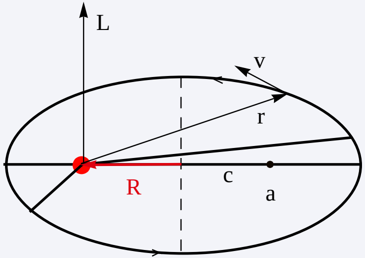
角动量守恒

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \vec{L} \perp \vec{v}, \quad \vec{L} \perp \vec{r}. \tag{2}$$

封闭轨道与非封闭轨道的比较



隆格-楞茨矢量守恒



隆格-楞茨矢量

$$\vec{R}=\frac{\vec{p}\times\vec{L}}{GMm}-\frac{\vec{r}}{r}=\frac{c}{a},\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}=0. \tag{3}$$

轨道方程

$$\vec{r}\cdot\vec{R}=\frac{L^2}{GMm^2}-r=rR\cos\theta,\qquad r=\frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+R\cos\theta} \tag{4}$$

开普勒运动

小结

找到了角动量和隆格-楞次矢量守恒，就得到了运动轨道。

氢原子

主要思路

找到全部守恒量，就知道对称性，得到系统的能谱。

量子力学中的对称性

对称性

如果一个系统在某操作下不变，称此系统具有该操作下的对称性。

薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle, \quad H = \frac{1}{2m}p^2 + V, \tag{5}$$

量子力学系统的对称操作(连续)

$$UHU^\dagger = H, \ \Leftrightarrow \ [U,H] = 0. \tag{6}$$

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \ \Rightarrow \ HU|\phi\rangle = EU|\phi\rangle. \tag{7}$$

若$|\langle\phi|U|\phi\rangle| \neq 1$, 则$U|\phi\rangle$是与$|\phi\rangle$简并的态。

对称操作的群性质

对称操作满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad U_2U_1HU_1^\dagger U_2^\dagger = H, \\
&(2) \quad (U_1U_2)U_3 = U_1(U_2U_3), \\
&(3) \quad \mathbb{I}H\mathbb{I}^\dagger = H, \\
&(4) \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.
\end{aligned}
$$

群:集合G

(1) 封闭性 (2) 结合律 (3) 单位元 (4) 逆元

结论：一个系统的所有对称操作构成一个群。

连续群的生成元：守恒量

生成元

$$U(\vec{\theta}) = \exp(-i\vec{\Omega}\cdot\vec{\theta}), \quad \vec{\Omega} = i\partial_{\vec{\theta}} U(\vec{\theta})|_{\vec{\theta}=0}, \tag{8}$$

对易关系$[\Omega_k, \Omega_j]$表征了群$U(\vec{\theta})$. 操作$U(\vec{\theta})$下H不变，$\vec{\Omega}$为守恒量

$$[U(\vec{\theta}), H] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{\Omega}, H] = 0. \tag{9}$$

$[\Omega_k, \Omega_j]$表示该系统的对称群。

例：SO(3)群，三维空间转动对称与角动量守恒

$$\vec{L} = i\partial_{\vec{\theta}} R(\vec{\theta})|_{\vec{\theta}=0}, \quad [L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{10}$$

氢原子的守恒量

氢原子的哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \tag{11}$$

角动量与隆格-楞茨矢量守恒

$$\begin{aligned} &\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \\ &\vec{R} = \frac{1}{2mk}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{\vec{r}}{r}, \\ &[\vec{L}, H] = 0, \quad [\vec{R}, H] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

守恒量的对易关系

守恒量的对易关系

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= i\varepsilon_{ijk} L_k, \\
[L_i, R_j] &= i\varepsilon_{ijk} R_k, \\
[R_i, R_j] &= i\frac{-2H}{mk^2}\varepsilon_{ijk} L_k,
\end{aligned} \tag{13}
$$

其中$i, j, k = 1, 2, 3$。
更简洁的形式

$$\vec{A} = [\frac{-2H}{mk^2}]^{-\frac{1}{2}}\vec{R} \tag{14}$$

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk} A_k, \quad [A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k. \tag{15}$$

四维空间转动

两维转动：一个生成元L^{12}.

三维转动：三个生成元$L^{12} = L_3, L^{23} = L_1, L^{31} = L_2$.

四维转动：六个生成元L^{ij}, $\quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,3,4$.
其中任选两个，必可找到第三个与它们构成三维空间的转动

例：取$F_1 = L^{13}, F_2 = L^{34}$,则$F_3 = L^{41}$

$$[F_i, F_j] = i\varepsilon_{ijk} F_k, \quad i,j,k = 1,2,3.$$

结论：氢原子具有四维旋转对称性，即SO(4).

动力学对称性

哈密顿量整体的对称性，大于其势能部分的对称性，是相空间的对称性。

氢原子能谱

两组独立的角动量

$$\vec{I}=(\vec{L}+\vec{A})/2,\quad \vec{K}=(\vec{L}-\vec{A})/2, \tag{16}$$

$$[I_i,I_j]=i\varepsilon_{ijk}I_k,\ [K_i,K_j]=i\varepsilon_{ijk}K_k,\ [I_i,K_j]=0. \tag{17}$$

其卡西米尔算符

$$\vec{I}^2=\vec{K}^2=\frac{1}{4}\Big[-\frac{mk^2}{2H}-1\Big]=j(j+1), \tag{18}$$

其中$j=0,1/2,1,3/2\ldots$
可得哈密顿量本征值

$$H=-\frac{k^2}{2n^2}M,\quad n=2j+1=1,2,3\ldots \tag{19}$$

氢原子

小结

角动量和隆格-楞次矢量守恒，意味着SO(4)动力学对称性，从它们可以用代数方法解得能谱。

相对论量子力学

主要内容

相对论氢原子不具有SO(4)动力学对称性。
具有SO(4)动力学对称性的Dirac方程。

Dynamical symmetry of Dirac hydrogen atom with spin symmetry and its connection with Ginocchio’s oscillator

F.-L. Zhang, B. Fu, J.-L. Chen, Physical Review A 78 (2008) 040101(R).

Dirac相对论量子力学

自由粒子的Dirac哈密顿量

$$H=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m. \tag{20}$$

角动量

$$[\vec{J},H]=0,\quad \vec{J}=\vec{L}+\vec{S}, \tag{21}$$

$$[\vec{L},H]\neq 0,\quad [\vec{S},H]\neq 0, \tag{22}$$

$$\vec{L}=\begin{bmatrix}\vec{r}\times\vec{p} & 0\\ 0 & \vec{r}\times\vec{p}\end{bmatrix},\quad \vec{S}=\begin{bmatrix}\frac{\vec{\sigma}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\vec{\sigma}}{2}\end{bmatrix}, \tag{23}$$

氢原子自旋轨道耦合

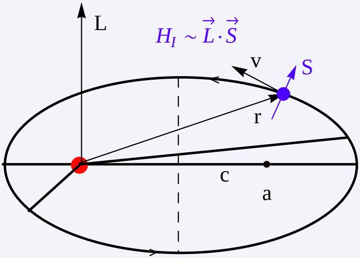
相对论氢原子

$$H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m - \frac{k}{r}. \tag{24}$$

自旋轨道耦合

$$H \sim \vec{L}\cdot\vec{S} \tag{25}$$

SO(4)动力学对称性被破坏，能级退简并，导致精细结构。



自旋对称Spin Symmetry

自旋对称的Dirac哈密顿量

$$H=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m+(1+\beta)\frac{V(r)}{2}, \tag{26}$$

守恒的轨道与自旋角动量$[\tilde{\vec{S}},H]=0,\ [\tilde{\vec{L}},H]=0$

$$\tilde{\vec{L}}=\begin{bmatrix}\vec{r}\times\vec{p} & 0\\ 0 & U_p\vec{r}\times\vec{p}U_p^{\dagger}\end{bmatrix},\quad \tilde{\vec{S}}=\begin{bmatrix}\frac{\vec{\sigma}}{2} & 0\\ 0 & U_p\frac{\vec{\sigma}}{2}U_p^{\dagger}\end{bmatrix}, \tag{27}$$

其中$U_p=U_p^{\dagger}=\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p},\vec{J}=\tilde{\vec{L}}+\tilde{\vec{S}}$.

启发

$\tilde{\vec{S}}$对H没有影响，是否当$V(r)=\frac{-k}{r}$时仍有SO(4)动力学对称性？

对应隆格-楞茨矢量的守恒量

假设其形式

$$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}Q_{21} & \vec{\sigma}\cdot\vec{p}Q_{22}\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

要求它守恒$[Q,H]=0$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= Q_{21}, \\ [Q_{11},V(r)]+[Q_{12},p^2] &= 0, \\ [Q_{12},V(r)]+[Q_{22},p^2] &= 0, \\ Q_{11} &= Q_{12}(2m+V(r))+Q_{22}p^2. \end{aligned} \tag{29}$$

得到守恒量

$$\vec{Q}=\begin{bmatrix} 2m\vec{R}+\frac{k\vec{r}}{r^2} & (-\frac{\vec{r}}{r})\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}(-\frac{\vec{r}}{r}) & \vec{\sigma}\cdot\vec{p}(\frac{1}{k}\frac{\vec{f}}{p^2})\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

守恒量的对易关系

守恒量的对易关系

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_i, \tilde{L}_j] &= i\varepsilon_{ijk}\tilde{L}_k, \\ [\tilde{L}_i, Q_j] &= i\varepsilon_{ijk}Q_k, \\ [Q_i, Q_j] &= i\frac{-4}{k^2}(H^2 - M^2)\varepsilon_{ijk}\tilde{L}_k, \end{aligned} \tag{31}$$

其中$i, j, k = 1, 2, 3$。
更简洁的形式

$$\vec{A} = [\frac{-4}{k^2}(H^2 - M^2)]^{-\frac{1}{2}}\vec{Q} \tag{32}$$

$$[\tilde{L}_i, \tilde{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\tilde{L}_k, \quad [\tilde{L}_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \quad [A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}\tilde{L}_k. \tag{33}$$

从对称性到能谱

两组独立的角动量

$$\vec{I} = (\tilde{\vec{L}} + \vec{A})/2, \quad \vec{K} = (\tilde{\vec{L}} - \vec{A})/2, \tag{34}$$

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k, \ [K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k, \ [I_i, K_j] = 0. \tag{35}$$

其卡西米尔算符

$$\vec{I}^2 = \vec{K}^2 = \frac{1}{4}\left[-\frac{k^2}{4}\frac{H+M}{H-M} - 1\right] = j(j+1), \tag{36}$$

其中$j = 0, 1/2, 1, 3/2 \ldots$

可得哈密顿量本征值

$$E^{\pm} = \frac{\pm 4n^2 - k^2}{4n^2 + k^2} M, \quad n = 2j + 1 = 1, 2, 3 \ldots \tag{37}$$

对称性及能级

利用与非相对论氢原子完全相同的程序，从守恒量$\vec{\tilde{L}}$ 和$\vec{Q}$出发，结论如下

- 具有自旋对称性的Dirac哈密顿量，当其势能为库仑势时，有SO(4)动力学对称性。
- 利用该对称性可用代数方法求解能级$E^{\pm}=\frac{\pm 4n^2-k^2}{4n^2+k^2}m$。
- 非相对论极限下该系统的守恒量和能级可以与氢原子对应。

Dynamical symmetry of Dirac hydrogen atom with spin symmetry and its connection with Ginocchio’ s oscillator

F.-L. Zhang, B. Fu, J.-L. Chen, Physical Review A 78 (2008) 040101(R).

该类问题发表的工作

Dynamical symmetries of 2D systems in relativistic quantum mechanics

F.-L. Zhang, C. Song, J.-L. Chen, Annals of Physics (N. Y.) 324 (2009) 173-177.

库仑势和谐振子势的两维Dirac方程中的动力学对称性

该类问题发表的工作

Dynamical symmetries of the Klein－Gordon equation

F.-L. Zhang, J.-L. Chen, J. Math. Phys. 50 (2009) 032301.

Klein－Gordon方程中的动力学对称性，势能为库仑势和谐振子势，及其球面空间的推广。

该类问题发表的工作

Higgs algebraic symmetry in the 2D Dirac equation

F.-L. Zhang, B. Fu, J.-L. Chen, Physical Review A 80 (2009) 054102.

势能为非中心对称的Smorodinsky-Winternitz势，
$V = \frac{1}{2}r^2 + \frac{k}{x_2^2}$，Dirac方程的动力学对称性用Higgs代数描述。

张福林

教育经历

- 南开大学数学所-博士
- 天津大学理学院-本科-硕士

主要方向，及发表文章

- 量子信息及其物理实现-7篇
- 量子力学中的代数方法-7篇

在研课题及展望

- 量子光学中电磁诱导透明(EIT)问题
- 量子多体关联度量及其应用
- 量子力学中可解与准可解系统的代数问题

谢谢大家！！